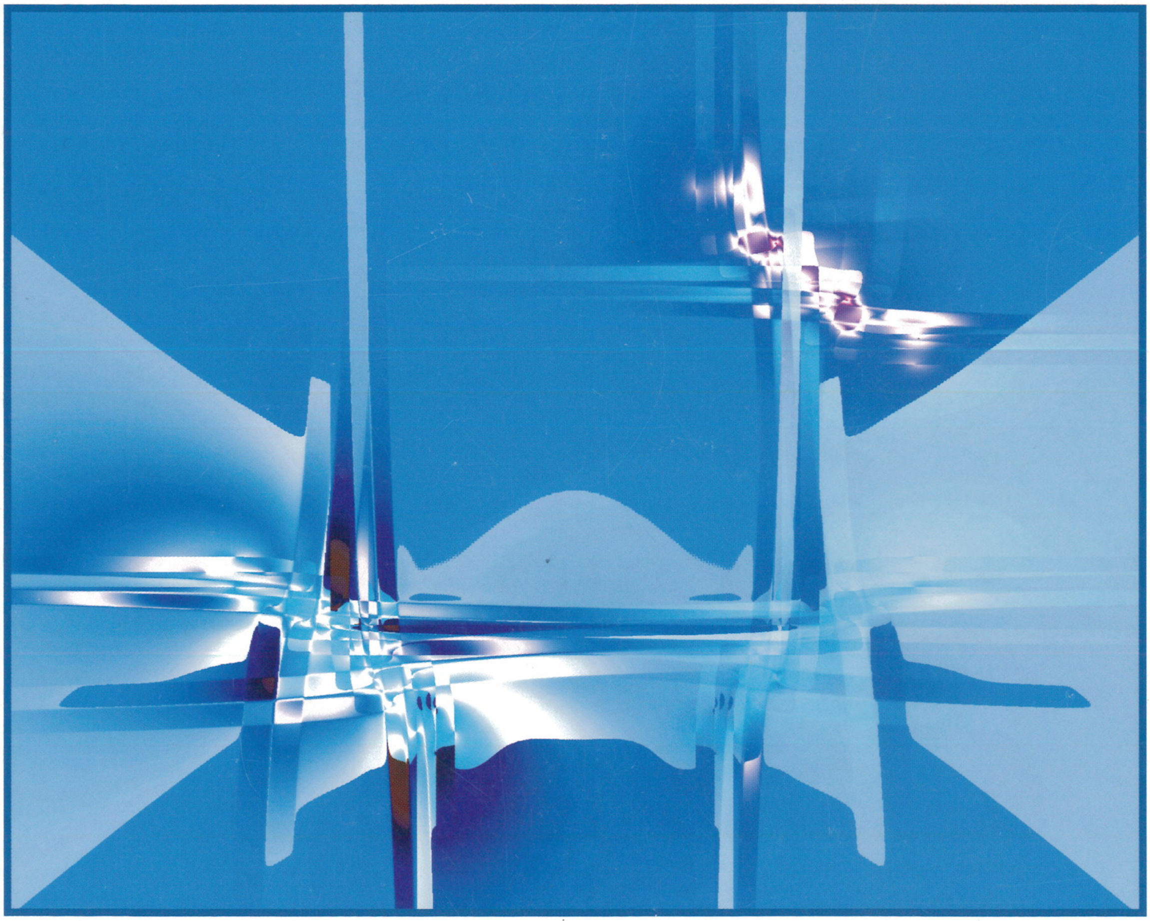
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年7月1日発行　第46巻7号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

7
2008

特集 物理的思考法のすすめ
諸分野におけるキーポイント



No.541
サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 541 July 2008

物理的思考法のすすめ

諸分野におけるキーポイント

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2005 年/9 省略
2005 年/10 不確定性原理の新展開
別冊　スーパーストリング
/11 0 の発見
/12 現代代数学への誘い
2006 年/1　偶然から必然へ
/2　物理法則の直観的理解
/3　〈強い力〉
/4　「空間」とは何か
別冊　量子の新世紀
/5　数学と物理の対話
/6　発見とひらめき
/7　重力は語る
/8　ネットワーク科学の数理
/9　ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1　ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2　ランダム行列の広がり
/3　現代物理における超対称性
/4　現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5　数学の直観的理解
/6　物理における位相の世界
/7　代数的物理観
/8　数学における場の量子論
/9　ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1　現象を視る
/2　ゲージ重力対応
/3　現代物理のための数学キーワード
/4　現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり
/5　物理と数学の難所
/6　線形代数の力

数理科学臨時別冊一覧

07 年/6　相対性理論
07 年/7　3 次元トポロジーの新展開
07 年/9　数理・情報系のための整数論講義
07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1　演習 くり込み群
08 年/3　熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5　重力理論講義
08 年/6　代数幾何入門講義

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
書泉ブックタワー(秋葉原)
三省堂本店(神田)
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店(池袋)
ジュンク堂書店(新宿)
芳林堂(高田馬場)
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
ブックファースト青葉台店(横浜)
栄松堂ジョイナス店(横浜)
有隣堂イセザキ町店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
文教堂ブックセンター(川崎)

旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
旭屋本店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂書店(京都)
ジュンク堂書店(神戸)
ジュンク堂三宮駅前店(神戸)
ジュンク堂書店(大分)
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂書店(仙台)
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

July 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 541

特集／物理的思考法のすすめ

物理学と数学

藤川　和男

物理学と数学の結びつきの歴史は古い．近代物理学の創設者であるガリレオは物理学の法則は数学で記述されると言ったと言われ，ニュートンは物理学者であると同時に歴史に残る数学者でもあり自然法則を記述する基本的な手段として微積分学を作りだした．力学の基礎方程式はニュートン方程式として2階の微分方程式で表され，自然界の全ての巨視的な運動を記述する原理となった．

ニュートン以降も，解析力学でおなじみのラグランジュとかオイラーとかハミルトンは全て一流の数学者であった．ヤコビも19世紀を代表する数学者の一人であり，2重周期を持つ楕円関数論は最近でも超弦理論で重要な役割を果たしている．また力学系の深い考察からS.リーは連続群の考察に導かれたと言われている．非ユークリッド幾何学に関しては，リーマンが考案した一般次元のリーマン幾何は一般相対性理論の基礎を与えた．他方，マクスウェルは電磁気現象の実験事実を記述する方程式として現在マクスウェル方程式と呼ばれる方程式を発見した．この方程式は4次元時空とローレンツ変換の概念を含んでいた．もし4次元時空という概念が19世紀に明確に認識されていたとしたら空間の幾何学を深く考えていたリーマンは一般相対性理論を考えたに違いないと，プリンストン大学でJ.ウィーラーが講義で学生に話して聞かせるのが常であった．光と野球のボールの運動に類似性を見つけるのは3次元の空間では難しいが4次元時空では両方とも測地線を描いているわけである．数学の全ての分野で才能を発揮したガウスは同時に電磁気学等でも名前を残している．

同時に，理論物理学と数学には，その基本的な手法において大きな差異もあるように思われる．このことが，例えば，今回のような特集が組まれる所以でもある．物理学では非常に具体的な物理的現象に基づいて非常に具体的な方程式とか場の理論の作用に基づく考察が行われ，数学では例えば2次元空間での数学的定理の高次元空間への一般化というような抽象的な観点から研究が行われることが多いように思われる．このような差異に拘わらず，物理学は数学を最大限に利用し，物理学での経験が数学に新しい息吹を吹き込むことが，過去に行われたように将来も続くことが期待される．

本特集では，物理学で用いられている数学的な考え方を主として数学に興味を持つ人たちに紹介するということが中心的な目標として据えられている．ただし，あくまでも物理学者として物理的な考えの解説が中心であり物理学を犠牲にして数学の解説をするということは考えられていない．数学は，数学者がよりよく知っているからである．解説の執筆者は我が国の理論物理学の長老から中堅の研究者に広くわたっており，これらの解説から読者の皆さんに理論物理の考え方を感じとって頂けるのではないかと期待している．

（ふじかわ・かずお，日本大学理工学部）

場の量子論の考え方

鈴木　博

1. はじめに

私が中学生の頃，百科事典で初めて素粒子の表を見たときに不思議に思ったことの一つは，素粒子の数や種類が絶えず変化することでした*1)．例えば，中性パイ中間子 π^0 という粒子は，生まれてから約 10^{-16} 秒で

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma \tag{1}$$

と 2 つの光子 γ に壊れると書いてあります (図 1)．

ニュートン力学では，点粒子（いわゆる質点）の運動を時刻の関数として座標で表すことを学びます．しかし，もし素粒子が大きさや構造を持たない質点ならば，図 1 のように質点が“枝分かれ”する現象をどのように表せばよいのでしょう？ ここでは，ある時刻を境に**質点の個数（と種類）が変化**するので，その時刻でニュートンの運動方程式の数自体が変化することになります．そんな力学は聞いたことがありません．

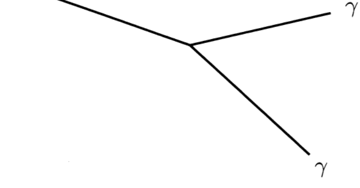


図 1　中性パイ中間子は 2 つの光子に壊れる．

現在我々は，ミクロの世界を記述する正しい力学法則はニュートン力学ではなく量子力学であるということを知っています．ここで初めに学ぶ方程式はシュレディンガー方程式ですが，一般にシュレディンガー方程式の数は質点の個数だけあります．結局上の現象を記述するには，ある時刻を境にシュレディンガー方程式の数自体が変化する必要があり，どういうことかよくわかりません．

ここで解説する場の量子論（量子場の理論とも言います）は，こうしたミクロの世界での**粒子の数や種類が変化する現象**を記述する，現在我々が持っている唯一*2)の枠組みです．その上この枠組みは，ある名前の粒子がすべて同じ性質を持つ (例えば，地上の電子も月の裏側の電子も**全く同じ**質量や電荷などを持つ——不思議だと思いませんか？) こともごく自然に説明します．またこれは非常に一般的な枠組みですので，素粒子物理学に限らず物性物理学などでも基本的な道具になっています．

場の量子論の本質を理解するためには，調和振動子の量子力学について簡単に知っておく必要があります．調和振動子とは，バネにつながれた質

*1)　もう一つ大変不思議だったのは，他の素粒子には質量があるのに，光子（光を表す素粒子）の質量には 0 と書いてあったことでした．(当時ニュートリノの質量は 0?と書いてありました.) 質量が 0 って何もないこととは違うの？ というのは長い間の疑問でした．

*2)　“枝分かれ”を直接記述するような量子力学（いわゆる点粒子の第一量子化）を考えることもできるのですが，この定式化は複雑な割に，対称性の自発的破れや非摂動論的現象などを記述するのが苦手なので，あまり使われません．

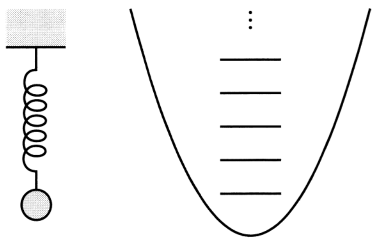


図2　調和振動子とそのエネルギー固有値.

点のこと（図2左）で，その運動方程式は質点の座標を x，質量を m，バネ定数を $k = m\omega^2$ とすると（時刻を t として）

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \tag{2}$$

となります．ω を角振動数と呼びます．さて，量子力学ではニュートン力学とは違って，質点のエネルギーは一般にとびとびの離散的な値（エネルギー固有値）に制限されます．特に (2) 式で表される運動の場合には，エネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

という系列になることが分かります．ここで $\hbar$ はプランクの定数で，非負の整数 n は調和振動子の量子状態を指定する量子数と呼ばれるものです．最もエネルギーの低い $n = 0$ の状態を基底状態，それ以外の $n = 1, 2, \cdots$ の状態をそれぞれ，第一励起状態，第二励起状態などと呼びます．ここで注目してほしいのは，この調和振動子のエネルギー系列が $\hbar\omega$ を単位に**等間隔**に並んでいることです（図2右）.

2. 場の量子化：電磁場の例

場というのは，一言で言うと，空間の各点各点に数字（または数字の組）が定義されているものです．これらの数字は時間とともに変化することもできます．身近なところでは，気温や気圧の分布はまさに上の字句通りですから，場の一種と考えることができます．物理学で最も代表的な場は電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ です．これらは，空間の各点各点で定義された向きと大きさを持つベクトルで，時間とともに変化します．つまり空間の点の座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ と時刻 t の関数ですから，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$ と表します．この電場と磁場（合わせて電磁場と呼びます）の運動を記述するマックスウェル方程式を少し書き換えると，電荷や電流の存在しないところで電場は*3)

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{4}$$

といういわゆる**波動方程式**に従うことがわかります．ここで c は光の速さで，$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ です*4)．上の波動方程式の解は速さ c で進む波を表します．このことからマックスウェルは，**光とは電場と磁場が振動しながら進む波（電磁波）に他ならない**と見抜いたわけです．

さて，原子のようなミクロの世界での粒子の運動は量子力学で記述されますが，そこでは粒子の座標と運動量（または時刻とエネルギー）が同時には決定できないという不確定性関係が本質的です．一方，原子は電子と原子核からなり，それぞれ電荷を持っていますから，電磁場とエネルギーや運動量のやり取り（相互作用）をします．これらのことから電磁場の運動にも不確定性がある，さらに言うと電磁場も量子力学の対象とすべきことが自然に要求されます*5)．

しかし，場と粒子とは一見全く違うものですから，電磁場の量子力学とはどのように作ればよいのでしょうか．これに答える鍵は，電場を空間座標の依存性に関してフーリエ展開することで得られます．つまり

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}(t)\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{5}$$

のように，電場を $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ といういろいろな波長の

---

*3)　電磁場には電場と磁場とがありますが，磁場はマックスウェル方程式を通して電場で表されるので，以下では電場にだけ注目すれば十分です．

*4)　電場はこれ以外にガウスの法則 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z = 0$ を満たさなくてはなりません．

*5)　すべての物質は重力場とも相互作用しますから，同じことは重力場についても言えるはずです．この重力場の量子力学の定式化は，しかしながら，現在の物理学における難問中の難問です．

波の重ね合わせで表すということです．波の波長と進行方向を指定するベクトル $\boldsymbol{k}$ を波数ベクトルと呼びます．その重ね合わせの重み（フーリエモード）が $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}(t)$ で，この重みが時間とともに変化することで電場が時間変化すると考えます．この式を (4) 式に代入すると，各フーリエモードは

$$\frac{d^2\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}(t)}{dt^2}+\omega_{\boldsymbol{k}}^2\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}(t)=0 \tag{6}$$

という方程式に従うことがわかります．ただし $\omega_{\boldsymbol{k}}=c|\boldsymbol{k}|$ と定義しました．これを (2) 式と比べると，**電場のフーリエモードは調和振動子と全く同じ形の方程式に従う**ことがわかります．両者で運動方程式が同じということは，**力学的な問題に関して両者は全く同等**ということです．(6) 式は各波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ ごとに成り立つので，モード $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}$ のラベル $\boldsymbol{k}$ ごとに 1 つ[*6)]の調和振動子（その角振動数 ω が $\omega_{\boldsymbol{k}}$）が対応しているということになります．波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は無限にありますので，以上のことから，**電磁場は無限個の調和振動子の集まりと力学的に等価である**という極めて重要な結論が得られます[*7)*8)]．

さて，電磁場の力学が調和振動子の集合体の力学と等価ならば，我々のよく知っている調和振動子の量子力学をその集合体に適用し，それを電磁場の量子力学とするのは全く自然です．これがディラックのアイデアで，このようにして場の量子力学を考えることを，**場の量子化**と言います．各フーリエモードに対応して，調和振動子は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の個数だけあります．そしてそれぞれの調和振動子一つ一つの量子状態を表すのに (3) 式の量子数 n が必要なので，結局電磁場の量子状態は量子数の組 $\{n_{\boldsymbol{k}}\}$ で指定されることになります．特に (3) 式から，量子化された電磁場のエネルギーは調和振動子のエネルギー固有値の総和として

$$E_{\{n_{\boldsymbol{k}}\}}=\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}n_{\boldsymbol{k}} \tag{7}$$

となります[*9)]．

電磁場の量子状態の例として，すべての $\boldsymbol{k}$ に対して $n_{\boldsymbol{k}}=0$ の場合を考えてみましょう．調和振動子の言葉では，すべての調和振動子が基底状態にあるという状況です．このとき (7) 式から電磁場のエネルギーは 0 になります．この状態を “真空” と名付けます．次に簡単な状態として，ある一つの特定の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ だけに対して $n_{\boldsymbol{k}}=1$ で，それ以外は 0 という状態を考えます．$\boldsymbol{k}$ に対応した調和振動子だけが第一励起状態にあり，その他はすべて基底状態にある場合です．この状態のエネルギーは $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ です．同様に，ある一つの特定の波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ だけに対して $n_{\boldsymbol{k}}=2, 3, 4, \cdots$ とした状態を考えると，それに応じて電磁場のエネルギーは $2\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}, 3\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}, \cdots$ と $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ の**整数倍**で増えていくことになります．そこで，**この単位 $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ を（波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に対応した）一つの粒子が持つエネルギーと考え，$n_{\boldsymbol{k}}$ がその粒子の個数を表していると解釈**します[*10)]（図 3）．こ

*6) 正確には，$\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}$ はベクトル量なので，その 3 つの成分に対応して 3 つの調和振動子が対応しています．このうちの 1 つぶんはガウスの法則から $\boldsymbol{k}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}=0$（つまり電場のベクトルの向きは波の進行方向と直交しなくてはいけない，これを横波という）となり，なくなります．というわけで実際には，電磁場の 1 つの波数ベクトルに対して 2 個の調和振動子が対応しています．以下では，簡単のためこの点は無視します．

*7) 注意してほしいのは，調和振動子の質点の座標 x が電磁場が住んでいる空間の座標 $\boldsymbol{x}$ に対応しているのではない，ということです．質点の座標 x に対応しているのは電場のフーリエモード $\widetilde{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{k}}$ です．また，調和振動子の質量と光子の質量も全く無関係です．

*8) ここでは，電磁場を例にとりましたが，物理学に現れる他の波動的な場にも同様の考えが成り立ちます．特に $a=x+(i/\omega)dx/dt$ と定義して (2) 式を $da(t)/dt+i\omega a(t)=0$ と書いたものとの比較から，シュレディンガー方程式に従う場やディラック方程式に従う場も調和振動子の集まりと等価であることがわかります．

*9) ここで，(3) 式にある定数 1/2 の部分はエネルギーをはかる原点をずらしたと考えて無視しました．しかし，重力まで考慮するとこうしてよいかどうかは微妙で，もし 1/2 を残すと真空のエネルギーは無限大になります．この宇宙定数の問題も難問中の難問です．

*10) エネルギーがある単位の整数倍だからといって，必ずしもそれが粒子とは言えないのではと思われるかもしれません．全くその通りで，本当に粒子と解釈できるためには，これ以外にも系の運動量や電荷などが，ある単位の整数倍になっていることを示す必要があります．例えば，電磁場の運動量の表式 $\boldsymbol{P}=\int d^3x\,\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/(\mu_0c^2)$（$\mu_0$ は真空の透磁率）を使うと，量子化された電磁場の運動量は $\boldsymbol{P}_{\{n_{\boldsymbol{k}}\}}=\sum_{\boldsymbol{k}}\hbar\boldsymbol{k}n_{\boldsymbol{k}}$ となり，これも上の粒子解釈と一致していることがわかります．1 粒子の状態に対しては $E^2=\boldsymbol{P}^2c^2$ が成り立つので，

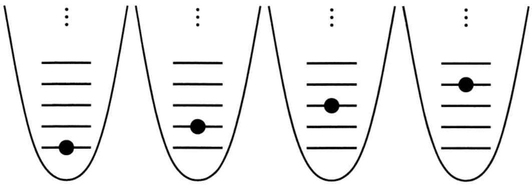


図 3　調和振動子の量子状態の例：左から真空，光子が 1 個，2 個，3 個の状態を表すと考える．

の粒子を光子と呼びます．波でもあり粒子でもあるという，いわゆる光の二重性は，このように電磁場の量子化によってはじめてきちんと理解されるのです．逆に，我々が粒子としてなじみ深いもの，電子や陽子などに対しても対応する場を考え，その量子化を考えることができます．この場合にも，電子や陽子などの存在は対応する調和振動子の励起状態として解釈できます*11)．

このようにして**場を量子化することで粒子の性質が自然に出てくる**ことは本当に驚くべきことです．また一方このことは，我々が量子力学という体系全体に強い信頼を置く根拠にもなっています．

3. 粒子数や種類の変化：相互作用の導入

では，具体的に (1) 式の現象を場の量子論で記述するにはどうすればいいでしょう．ここでの登場人物はパイ中間子 π^0 と光子 γ です．前節で見たように，光子は電磁場を量子化すれば得られます．パイ中間子に対しては別の新しい場 $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ を導入する必要があります*12)．つまり，パイ中間子に対応した新しい種類の調和振動子があることになります（図 4）．図 1 で最初の時刻にはパイ中間

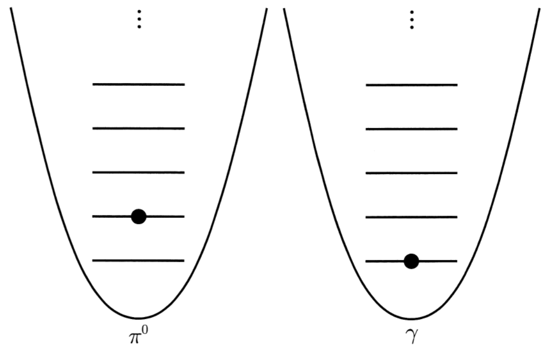


図 4　パイ中間子と光子のそれぞれに対応した調和振動子を考える．宇宙にパイ中間子が 1 個だけある状態を図示した．

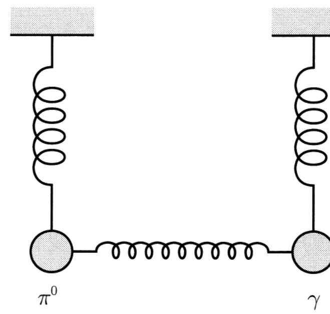


図 5　パイ中間子と光子の調和振動子を弱いバネで結ぶ．これで両者はエネルギーのやり取りをするようになる．

子しかいないので，対応する調和振動子の状態は図 4 のようになっています．

さて，この状態からスタートして時間が経過すると何が起こるでしょう．実はいくら待っても何も起きません．これは当然で，パイ中間子の調和振動子と光子の調和振動子はまだ全く無関係ですから，それぞれが勝手に振動をくり返しているだけです（光子の調和振動子は基底状態のままです）．図 1 のような現象が起こるためには，両者がつながっている必要があります．

そこで，パイ中間子と光子の調和振動子を，別の弱いバネで結んでやりましょう（図 5）．このように，別の調和振動子どうしを結ぶことを**相互作用**を導入すると言います．**相互作用を通じて，調和振動子たち（つまり粒子たち）はお互いにエネルギーや運動量のやり取りをする**わけです．（今の場合の相互作用の具体形を説明するには紙面が足りない

アインシュタインの関係式 $E^2 = \boldsymbol{P}^2c^2 + m^2c^4$ から光子の質量 m は 0 であることがわかります．

*11)　これはジョルダンとウィグナーのアイデアです．ただし，こうしたいわゆるフェルミ粒子に対しては，通常の調和振動子のかわりにフェルミ的な調和振動子を考える必要があります．フェルミ的な調和振動子とは何か？ については参考文献をご覧下さい．

*12)　この場は，クライン・ゴルドン方程式 $\partial^2\phi/\partial t^2 - c^2\nabla^2\phi + (m_\pi^2 c^4/\hbar^2)\phi = 0$ に従って運動することがわかっています．ここで m_π は π^0 の質量です．これも ϕ をフーリエ展開することで，$\omega_{\boldsymbol{k}} = c\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m_\pi^2 c^2/\hbar^2}$ の調和振動子の集まりと等価であることがわかります．

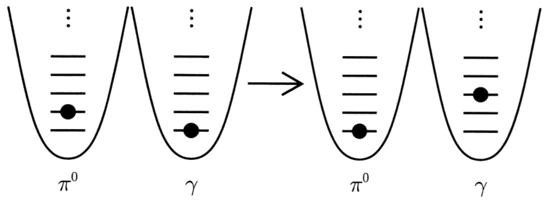


図 6　相互作用があれば，左の状態から右の状態への変化が起こる．左の状態では，光子がなく，パイ中間子が 1 個だけある．右の状態では，パイ中間子がなく，光子が 2 個ある．この変化が図 1 の現象に対応している．

ので，ここには具体形を書きません[*13)]．）すると実際，パイ中間子の調和振動子の振動が光子の調和振動子のほうへと移り，図 6 のような現象が起こることが量子力学を使って計算できます[*14)][*15)]．ここで重要なのは，粒子の個数と調和振動子の個数の間には直接の関係がないということです．世の中に光子が 2 個あるときでも，100 個あるときでも調和振動子の個数自体は全く変化しません．**時間とともに変化するのはあくまでも調和振動子の状態**です．このように，場の量子論では，状態の変化が粒子の数や種類の変化に対応しているおかげで，図 1 のような現象を簡明に記述することができるわけです．

量子力学で計算できるのは，上のような変化が起こる確率です．場の従う方程式と相互作用の具体形がわかっていれば，図 1 のような絵を描き，これにあるルール（ファインマン則）を適用することで，2 乗して確率になる量（S 行列）を計算する手法が確立しています．そして，この量からどれくらいの頻度で反応が起こるかを予言し，実験と比較することもできます．こうした事柄については参考文献を見て下さい．

4. 基本法則の解明と対称性

ミクロの世界を記述する言語としての場の量子論の基本的なアイデアはわかりました．すると次の問題は，この言語を使って具体的に何を表現するかです．つまり，現実の世界には，いったい何種類のどんな場（= 調和振動子）があって，どのような相互作用（= 調和振動子間をつなぐもの）をしているのでしょうか．

これは難問です．例えば素粒子の崩壊の表を漫然と眺めていても具体的な方程式は見えてきません．何か有効な指針が必要です[*16)]．

一つの重要な鍵は保存則の考察から得られます．保存とはある量が時間的に変化しないことで，例えば，エネルギーの保存則はその代表的なものです．相互作用の具体形はエネルギー保存則を壊さないものでなくてはなりません．同様に（角）運動量の保存則，電荷の保存則なども基本的なものです．また，ある反応の前と後で保存している量を見つけられれば，大変重要な手がかりになります．このときの保存則は必ずしも厳密なものではなく，近似的に成り立つものでも貴重なヒントになります．

保存則を相互作用の具体形と関連づける際に重要なのが，**対称性**という概念です．対称性というのは，系の変数（本稿の例の場合 $\boldsymbol{E}$ や ϕ です）をある特定のルールで置き換えたときにも方程式が形を変えない（あるいは特定のルールで変わる）ことを指します．さらに（あるクラスの）対称性と保存則は 1 対 1 で対応していることがわかっています．つまり，保存則があればそれに対応した対称性があり，対称性は可能な相互作用の形を制限する，というわけです．

素粒子の世界で最も基本的な対称性はポアンカ

---

*13)　でも説明抜きで書いてしまうと，相互作用ハミルトニアンとして $\alpha\int d^3x\,\phi\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ とすればよいことがわかっています．ここで α はある定数です．

*14)　誤解のないように注意しておくと，相互作用を入れた瞬間がパイ中間子が崩壊する瞬間というわけではありません．実は相互作用は最初からからずーっとあるのですが，量子力学では確率論的に物事が起こるので，ある確率である時刻にパイ中間子の崩壊が起こるのです．

*15)　正確には，図 6 の右では光子の調和振動子を $\boldsymbol{k}$ のものと $\boldsymbol{k}'$ のものと 2 つ考え，それぞれが第一励起状態になるとするべきですが，それではアイデアが分かりにくいのであえて不正確にしてあります．

*16)　一つのヒントは崩壊までの時間（粒子の寿命）に注目することで得られます．一般則として，崩壊が速ければ（つまり寿命が短ければ）その崩壊を引き起こす相互作用は強いのだと考えられます．

レ対称性です．これは，方程式が並進や相対論的変換（ローレンツ変換）の下で対称であることを要求します．ただし，ポアンカレ対称性だけでは相互作用の形にあまり制限がつきません．次に重要な対称性がいわゆる**ゲージ対称性**で，詳細は他の稿に譲りますが，この対称性は可能な相互作用の形を非常に厳しく制限します．これ以外の重要な対称性としては，カイラル対称性や（まだ実験で検証されてはいませんが）超対称性などがあります．

このように，対称性の概念は場の量子論にとって基本的なもの*17)なのですが，場の量子論ではさらに面白いことが起こります．それは**場の量子的な揺らぎが対称性を壊す**という現象です．この現象を**アノマリー（量子異常）**と呼びます．例としては，カイラルアノマリーというものがあり，これは量子化が，ポアンカレ対称性，ゲージ対称性とカイラル対称性の3つを同時に保つことができないというものです*18)．これは，古典論（ニュートン力学）では考えられなかった場の量子論固有の不思議な現象で，場の量子論の奥深い内容を垣間見せてくれます．

5. 場の量子論の現在

これまで述べてきた，まず独立した調和振動子たちがいて，その間が弱いバネでつながっているという場の量子論の描像は，いわゆる摂動論的描像というものです．現在の場の量子論における大きなテーマの一つは，非摂動論的現象の研究です．調和振動子の言葉に基づく上の描像は，粒子間の相互作用（調和振動子間をつなぐバネの強さ）が非常に強いときには，どの程度よいものかわかりません．例えば多数の調和振動子がひと固まりになって振動するソリトンのような粒子があって，その粒子を使った記述のほうが本当はよいのかもしれません．また，量子力学で知られているトンネル効果は，調和振動子間の相互作用という言葉では表現しきれないものです．こうした場の量子論における非摂動論的効果の研究と，そうした研究を第一原理から可能にする場の量子論の定式化が一つの流れです．

もう一つの流れは，場の量子論をひろがった物体の場合に一般化する研究です．通常の場の量子論からは点粒子が自然に出てきますが，これをひろがった物体の場合に拡張できないでしょうか．特に，1次元的にひろがった弦や2次元的にひろがった膜は，素粒子の統一模型や重力場の量子化の文脈で重要と考えられています．そこでこれらを記述する場の量子論の構成が盛んに研究されています．

詳しくは述べられませんが，これら2つの流れには密接な関係があります．そしてそこでは，**経路積分**という量子化の方法が一つの基本的な考え方になっています．

*17) ここでは，相互作用の形を制限するという観点から対称性を紹介しましたが，実は対称性はしばしば場の量子論の無矛盾性を保証する条件にもなっているのです．

*18) 実は，カイラルアノマリーがないと，式(1)の崩壊はほとんど起こらないことがわかっています．脚注*13)の相互作用もカイラルアノマリーの効果を言い換えたものです．

参考文献

1) 場の量子論の考え方を手っ取り早く知りたい方には，高橋康，表實：『古典場から量子場への道』，講談社(2006).
2) 場の量子論の日本語の教科書としては，坂井典佑：『場の量子論』，裳華房(2002); 柏太郎：『演習 場の量子論—基礎から学びたい人のために』，サイエンス社(2006).
3) 素粒子物理学とその現在までの歴史については，原康夫：『素粒子物理学』，裳華房(2003).
4) 経路積分とアノマリーに関しては，藤川和男：『経路積分と対称性の量子的破れ』，岩波書店(2001).

（すずき・ひろし，理化学研究所仁科加速器研究センター）

場の理論の対称性

九後 汰一郎

場の理論における対称性といえば，一番重要なものは「ゲージ対称性」である．

ゲージ対称性は 1970 年代の素粒子世界の標準理論の成立に基本的な役割を果たし，逆に標準理論の成功は，自然界のすべての相互作用の本質的起源がゲージ原理であることを明らかにしたのである．

ここではゲージ対称性を巡って話をしたい[1]．

1．誰がゲージ原理を発見したのか？

昔，私がミュンヘンのマックス・プランク研究所でポスドクをやっていた頃「電磁相互作用の本質が（局所）ゲージ不変性にあることを，一体誰が最初に気づいたのでしょう？」という質問を当時そこに客員として滞在していた京都大学の先輩の林憲二さんにしたことがある．彼は即座に「それはワイルだ」と教えてくれた．

これは 1977 年のことだから，既に標準模型ができあがってゲージ原理の基本的重要性が十分に認識されていた頃である．何故そんな頃になっても，ゲージ原理を最初に認識した人が広く知られていなかったのか，不思議である．そして，現在においてさえも広く知られているとは言い難い．

この間の経緯が「The Dawning of Gauge Theory」[2]という O'Raifeartaigh （オラファッティ）の本に詳細に書かれている．ワイルが如何にしてそのすばらしい認識に至るのか，がこの本の前半のハイライトである．ワイルのその認識の重要性をパウリが認め，パウリの書いた Handbuch を通じてヤンがそれを受け取りヤン・ミルズ理論の発見に至る，のである．

最初ワイルは，1918 年に発表した論文 “Gravitation and Electricity” でアインシュタインの重力理論の中にマックスウェルの電磁気学を統一しようと，今日ワイル変換あるいは共形変換と呼ばれている計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の局所的**スケール変換**

$$g_{\mu\nu}(x) \;\to\; e^{\rho(x)} g_{\mu\nu}(x)$$

を考えた．座標点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の物理的距離の 2 乗が $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ で与えられることを考えれば，これは時間空間のスケールを時空点 x ごとに $e^{\rho(x)/2}$ 倍することに相当する．ワイルは，この変換に対する不変性を要求して，

$$\phi_\mu(x) \;\to\; \phi_\mu(x) + \partial_\mu \rho(x)$$

と変換するベクトル場 ϕ_μ が存在すべきことを導き，それが電磁場ポテンシャル A_μ と同定できると主張した．しかし，Bohm–Aharanov 効果がよく知られている今日からすれば明らかなように，電磁場をこのようなスケール変換のゲージ場と考えると，非自明な電磁場が存在するとき，2 つの同じ長さの物差し（または時計）を 2 つの異なる経路に沿って同一点にもってゆくと，互いに異なる長さ（異なる進み方）になってしまう，ということが起こって事実に反する，ということが直ち

にアインシュタインにより指摘された．

ワイルは当然反論したがそれは無理筋であった．1925年に量子力学が登場するが，これをスケール変換ではなく，電子（荷電粒子）の波動関数$\psi(x)$の**位相変換**とするべきである，と正しく指摘したのは，シュレーディンガーとロンドンであった．

シュレーディンガーは，1922年前期量子論の段階で，例えば電子が正電荷のまわりのクーロン場で一周してきたときに生ずるワイルの非可積分因子$\exp[(e/\gamma)\oint\phi_\mu dx^\mu]$は，もし，係数$\gamma$が（ワイルが言うように実数ではなく）純虚数でかつ大きさがプランク定数，$\gamma=\hbar/i$，であれば，ボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件を用いれば，$e^{2\pi ni}=1$となり，'長さ' の不一致の問題は生じないことを指摘していた．また，量子力学を波動力学として与えた一連の論文の一つ（1926年）でも，電磁相互作用が極小相互作用の$\partial_\mu \;\rightarrow\; \partial_\mu-\frac{ie}{\hbar}A_\mu$の置き換えで記述できることを指摘している．（奇妙なことに1922年の自身の論文には全く言及していない！）ロンドンは1927年に出た論文で，1922年のシュレーディンガーの論文を発展させ，それをできたばかりのシュレーディンガーの量子力学の文脈で扱ってワイルの非可積分因子が位相因子$\exp[i(e/\hbar)\oint A_\mu dx^\mu]$となるべきことを示した．

この紆余曲折を経て，ワイルは遂に1929年の*Zeit f. Physik*の論文 "Electron and Gravitation" で最終的に正しい「ゲージ原理」の認識に到達する．すなわち，今日我々が認識しているように，局所$U(1)$位相変換

$$\psi(x) \;\rightarrow\; e^{ie\theta(x)}\psi(x)$$

の下で理論が不変であることを要求すれば，ゲージ場$A_\mu(x)$の存在が導かれ，電荷を持つ粒子とは共変微分

$$D_\mu=\partial_\mu-\frac{ie}{\hbar}A_\mu(x)$$

を通じて相互作用することが決まる．また，電磁場の運動項も，ゲージ不変な場の強さ$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$の2乗と決まってしまう．

最初は物理好きの数学者としてワイルを好ましく思っていなかったパウリも，この時点で初めて，「単に知られた理論の不変性ではなく，**ゲージ場の存在**を導き**相互作用の形**を決定する**原理としてのゲージ不変性**」というワイルの認識の重要性を認めるのである．

かくして「ゲージ原理の発見者はワイルである」と言って良いだろう．今日，局所変換が皆，スケール変換に起源を持つ「ゲージ変換」という名前で呼ばれることで暗に顕彰されているとは言え，このことが歴史的に明快には伝えられていないのは，上述のようにシュレーディンガーやロンドンらによる知見があって初めて正しい最終認識に達した，という曲折の経緯を辿ったせいであると思われる．

2. 誰がヤン・ミルズ理論を発見したのか？

1933年にはフェルミの弱い相互作用の理論が，1935年には，湯川の強い相互作用の理論が出る．この素粒子論の幕開けの流れの中でクラインは，重力と電磁気のみならず，湯川の強い相互作用も統一すべく，自分やカルーツァの5次元重力の理論を拡張し，5次元目の線要素は行列値をとるという奇妙な一般化を用いて，本質的に$SU(2)$ゲージ場に対する正しいヤン・ミルズ作用を得た．ただ，クラインは$SU(2)$の局所不変性を要求しているわけではないので，$SU(2)$二重項の物質場に対する共変微分の形が異なったり，荷電ゲージ場成分にだけ手で質量項を付け加えたりしている．これは，1938年ポーランドのKazimierzで開かれた会議で口頭発表され，翌年刊行の会議録に掲載されている．

第2次世界大戦後，量子電気力学（QED）のくりこみ理論の成功と新粒子の発見など強い相互作用の性格がわかってくる中で，パイスは1953年のLeidenで開かれた会議で，強い相互作用のアイソスピン不変性を局所化した場の理論を提案する．これに刺激を受けたパウリは，その年パイスに宛てた2通の手紙で，$SU(2)$のヤン・ミルズ場の作用積分，二重項に対する共変微分など，完全に正しい式を与えている．しかしながら，二重項

の粒子の質量が縮退することや，ゲージ場が質量を持たないことなどから，現実と合わないと考えたせいか，この仕事は決して論文として発表されなかった．そして，翌1954年についに，ヤンとミルズの論文が現れるのである．

ヤン・ミルズの論文は，論文に書かれているようにパイスやパウリと同じく強い相互作用の理論を作るという動機で書かれている．ヤン自身が後に語っているところによると，パウリのHandbuchから，ゲージ原理が電磁相互作用を**決める**ことを学び，それに強く感銘を受け，1949年頃からアイソスピンのゲージ化を考えていたらしい．しかしゲージ共変な場の強さの表式になかなか到達できずに1953年にミルズと一緒にやっと見つけたとのことである．ヤンやミルズ自身もヤン・ミルズ場がゲージ不変性から質量項を持てないことに困っていたが，Princetonでヤンが初めてヤン・ミルズ理論をセミナーで発表したとき，その話を始めるや否や「そのベクトル場の質量はどうなるのか？」とパウリがしつこく質問してなかなか先へ行かしてくれず，オッペンハイマーの取りなしでやっとセミナーを続けられたとのことである．すべてを既に知っていたパウリにとってはそういう論文を発表したヤンがおもしろくなかったことだろう．しかし，論理や形の**美しいものは表面的な困難があっても発表しておくべき**だという教訓である．特に若い人は失うものは何もないのだから．

O'Raifeartaigh の本[2]では，ヤン・ミルズの論文とほぼ同時に独立になされたShawおよび内山の仕事の内容や，その発表を巡る興味ある経緯について書かれているので是非読まれたい．

3. 対称性の自発的破れ

現代の素粒子の場の理論における対称性に関して，もう一つ極めて重要で基本的な概念は，南部陽一郎の導入した「対称性の自発的破れ」である．1961年のNambu–Jona-Lasinioの論文[3]が超有名だが，その前年の1960年に*Phys. Rev.*に掲載された'物性分野'の論文"Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity"[4]がすごい．超伝導の本質が$U(1)$ゲージ不変性の自発的な破れにあること，それに伴い零質量粒子が現れること，電磁場が結合するとそれが吸収され，電磁場が質量を持つようになること，それがマイスナー効果であること，などが，すべて書かれている．すなわち，Goldstoneの定理から，Higgs現象まですべて書いてある！ それを読むと，どうしてその後のGoldstoneの仕事（61年）や，Higgsの仕事（64年，66年）を南部自身がやらなかったのかわからなくなる．

1960年には，J.J. Sakuraiが，ヤン・ミルズ理論を強い相互作用のρメソンに適用している．翌61年には，Glashowが$SU(2)\times U(1)$のヤン・ミルズ理論を適用し，後にノーベル賞の対象となった電弱相互作用の理論を作った．これらではともにゲージ対称性を壊すゲージ場の質量項は勝手に手で加えている．

61年にGoldstoneの定理が出て大域的対称性の破れには必ず（今日南部–Goldstone粒子と呼ばれる）零質量粒子が付随することが認識され，64年，66年にHiggsの仕事，翌67年にはKibbleの仕事が出て，ゲージ対称性の場合は，それが吸収されゲージ場が質量を持つようになること（Higgs機構）が明らかにされる．この段階でやっとヤン・ミルズのゲージ場が質量を持てない，というパウリ以来の困難が解消された．このKibbleの$SU(2)$モデルは，Weinberg–Salam模型のHiggsセクターそのものであるが，Kibble自身も「弱い相互作用の理論にそれを適用したいと思っていた」と後に語っている．結局，その最後のステップは，Weinbergがその年のうちに行うのであるが，Weinbergがやれて，Kibbleにできなかった，その差は何に由来するのだろうか？（WeinbergがGlashowの仕事を知っていたことか？）

この$SU(2)\times U(1)$に基づくWeinberg–Salamの電弱理論は，しばらく注目されなかったが，1971年に't Hooftのヤン・ミルズ理論のくりこみ可能性の証明の論文が現れ，それで一躍脚光を浴びることになる．実験的に中性カレントの事象がなかな

か見つからず，Weinberg–Salam 理論を中性カレントを持たないようにする亜流モデルがいろいろ提唱されるが，結局 72 年末から 73 年初めに中性カレントが見つかり，亜流モデルはすべて消えた．

この電弱理論の成功と平行して，73 年には Gross–Wilczek と Politzer がヤン・ミルズゲージ理論に対し，エネルギーが上がるにつれ相互作用の強さが弱くなるという「漸近自由性」を発見するに至り，強い相互作用が $SU(3)_{カラー}$ ゲージ理論——量子色力学（QCD）——で記述できるという認識が広まり，$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ に基づく強・弱・電磁相互作用の標準理論の成立に一挙に進むのである[5]．

4. BRS 対称性と共変な演算子形式

このようなゲージ理論を巡る目覚ましい発展は，一応 1974 年くらいにはいったん終わる．この後は，閉じこめ機構の解明，というのが唯一残された大問題，という感じであった．しかし，ゲージ理論のくりこみ可能性やそれと表裏一体のユニタリ性の証明に関しては，'t Hooft 以来，Lee–Zinn Justin や 't Hooft–Veltman などの論文が現れるのだが，依然として明快でも完全でもなかった．そういう状況の下で 1975 年に Becchi（ベッキ）–Rouet（ルエ）–Stora（ストラ）（BRS）の論文が現れる[6]．ゲージ固定項と，対応する Faddeev–Popov（FP）ghost 項の加わったゲージ理論の全作用は，もとの局所ゲージ不変性をもはや持たないが，グラスマン数（反可換数）を変換パラメータとするような，ある奇妙な対称性——BRS 対称性——を持つ，ということに彼らは気づいたのである．グラスマン数をパラメータとするフェルミ的対称性自体は，その頃既に超対称性が発見されていて新しいものではなかった．しかし BRS 変換は，変換パラメータがスカラーなのに反可換なグラスマン数という奇妙なものであった．BRS 変換を具体的に書けば，ゲージ場や物質場といった普通の場に対しては通

常のゲージ変換のパラメータ $\theta^a(x)$ を，x に依存しないグラスマン数 λ とグラスマン数のスカラー場（FP ghost 場）$c^a(x)$ との積に置き換えて得られる：$\theta^a(x) \to \lambda c^a(x)$．よって，ゲージ場 $A^a_\mu(x)$ やフェルミ粒子場 $\psi_i(x)$ の BRS 変換は

$$\delta_{\rm B} A^a_\mu(x) = \lambda(\partial_\mu c^a(x) - igf_{abc}A^b_\mu(x)c^c(x)),$$
$$\delta_{\rm B}\psi_i(x) = ig\lambda c^a(x)(T^a)_i{}^j\psi_j(x).$$

ここで，f_{abc} はゲージ群の構造定数，T^a は生成子の表現行列である．FP ghost 場 $c^a(x)$ の BRS 変換は，ゲージ場の 2 回 BRS 変換 $\delta_{\rm B}(\delta_{\rm B}A_\mu)$ が零になるように決められる．$\delta_{\rm B}c^a(x) = f_{abc}c^b(x)c^c(x)/2$ となる．さらに，ゲージ固定された理論の作用に登場する場としては，FP 反 ghost 場 $\bar{c}^a(x)$ と中西–Lautrup 場 $B^a(x)$ があるが，その BRS 変換は $\delta_{\rm B}\bar{c}^a(x) = i\lambda B^a(x)$，$\delta_{\rm B}B^a(x) = 0$．BRS 変換の著しい性質は，その 2 回変換が零になるという冪零性（nilpotency）である．任意の場 Φ に対し，$\delta_{\rm B}(\delta_{\rm B}\Phi) = 0$．同じことであるが，変換を引き起こす BRS 電荷 $Q_{\rm B}$ も冪零である：$Q_{\rm B}^2 = 0$．

この BRS 変換の下での不変性を用いて，もう一度ゲージ理論のユニタリ性やくりこみ可能性からすべてが考え直される．今日 BRS 定式化というと，演算子形式（operator formalism）を意味しているが，Becci, Rouet, Stora 自身は，従来通り経路積分に則った立場であり，演算子形式を与える，という問題意識はなかった．歴史的な興味であるが，彼らはその論文の中で，「ヤン・ミルズ理論は，Lagrangian がエルミートでないのに，物理的 S 行列がユニタリーになっている，非常に特異な例を与えている」と言っている．もちろんこれは，彼らが FP ghost に対する従来の間違ったエルミート属性の付与，すなわち，FP 反 ghost 場が FP ghost 場のエルミート共役である

$$c^a(x)^\dagger = \bar{c}^a(x) \qquad (1)$$

という考え方に囚われていたせいにすぎない．これは FP ghost 場と FP 反 ghost 場に対する ’t Hooft 以来の記号からくるほとんど無意識の，それ故深い考察がなされてこなかった単なる思い込みであった．この間違いが正されるのは，後述の筆者と小嶋氏の仕事においてである[7]．正しくは，（作用の中で FP ghost の運動項に i 因子を掛けて置けば）FP ghost 場も FP 反 ghost 場もエルミートとしなければならない．そうして初めて，ラグランジアンもハミルトニアンも BRS 演算子 $Q_{\rm B}$ もエルミートとなる．これらのエルミート性なしには無矛盾な演算子形式の理論は作れない．

BRS の仕事を含め，ここまではすべて経路積分という見通しのよい方法に則って発展してきた．実際，’t Hooft がユニタリ性を証明できたのは，1963 年の Feynman の 1-loop レベルでの ghost の導入があり，’67 年に DeWitt が任意ループに一般化し，同年それを Faddeev と Popov が経路積分で一挙に出して見せた，という歴史があったからである．Veltman は Faddeev–Popov の論文のレフェリーをしてその論文を知り，’t Hooft は Veltman を通じて初めから経路積分を使うのである．

しかし，我々が素粒子物理を語るときは必ず粒子描像や状態を考えている訳で，経路積分ですべての物事が済むわけではない．例えば，上でユニタリ性の証明と書いたが，実はゲージ固定条件に物理的 S 行列が依存しないことを証明しているだけで，直接ユニタリ性の証明を与えているわけではない．直接に証明するには，やはり演算子形式が強力であり，演算子なら，S 行列がユニタリーというのは，ハミルトニアンがエルミートなら，見ただけで明らかである．Feynman 則の総体からユニタリ性を示すというのは如何にも見通しが悪いのである．

何はともあれ，ゲージ理論の演算子形式を与える必要があった．演算子形式の先行する歴史としては，まず，QED の場合に，Gupta–Bleuler の定式化が 1950 年になされている．これは Feynman ゲージだけだが，一般の共変ゲージで QED の不定計量の理論を完成させたのは，1966 年の中西–Lautrup の仕事である．これが完全な演算子形式を与えており，真の物理的状態は，‘物理的’ ゼロノルム状態だけの違いを無視する ‘状態のクラス（類）’ と考えるべきこと，すなわち，ゼロノルム状態の空間で割った商空間上で，ユニタリ性が成り

立つこと，などが初めて指摘されている．

この構造は，結局ヤン・ミルズ理論の場合もそのまま引き継がれる．1977年に私と小嶋氏の仕事が現れ[7)]，初めて，物理的状態が

$$Q_{\rm B}|{\rm phys}\rangle = 0 \tag{2}$$

の補助条件を満たすものとして定義された．すると $Q_{\rm B}$ の冪零性（とエルミート性！）から必然，$Q_{\rm B}|*\rangle$ という形の状態（BRS exact states）が物理的なゼロノルム状態になり，そういう状態を無視するクラスを元とする商空間，今風の言葉でBRSコホモロジー，として真の物理的状態空間を考えるべきだということになる．この物理的状態を定義するBRS電荷 $Q_{\rm B}$ を用いた補助条件 (2) は，今日ゲージ理論，弦理論などで自明のごとく広く使われているが，初めの頃はKugo–Ojima条件と呼ばれていた．しかしその後，単に横波モードからなる状態として定義された物理的状態 $|{\rm phys}\rangle$ が，$Q_{\rm B}|{\rm phys}\rangle = 0$ の式を満たす，と書いていたCurci–Ferrariが，この補助条件の提唱者であるとする誤った見解を流布する文献が現れ，その影響であろうか，この補助条件を書く際にその提唱論文が引用されることがほとんどなくなった．物理的状態を選び出す定義式として (2) を置くのか，横波モード等という別の条件で物理的状態を定義しておいて，それが性質 (2) を持つと言うのかは，同じ式を書いていても概念的には全く違うのである．

参考文献

1) この稿は，基礎物理学研究所の研究会で行った話の一部に基づいている：九後汰一郎，「ゲージ理論をめぐって——Yang-Mills 50年——」，素粒子論研究 **110** 巻3号 (2004) C22–C35.

2) L. O'Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory*, (Princeton Univ. Press, Princeton, 1997). 以下で引用の古い論文の多くはこの本に収録されている．

3) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246.

4) Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117** (1960) 648.

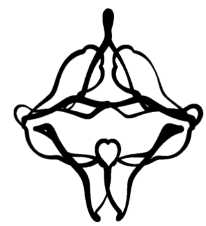
5) 電弱理論や標準模型の成立に関しては，例えば，本誌2007年11月号の特集：「〈電弱統一理論〉」参照．

6) C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Annals Phys.* **98** (1976) 287; BRS対称性の詳しい説明は，例えば九後汰一郎，『ゲージ場の量子論I』p168.（培風館，1989）．

7) T. Kugo and I. Ojima, *Phys. Lett. B* **73** (1978) 459. これも詳細は前掲の拙著を参照下さい．

（くご・たいちろう，京都大学基礎物理学研究所）

ゲージ理論の美しさからのヒント



細谷　裕

1. 隠れた力学変数

ゲージ理論は美しい．素粒子の基本相互作用はゲージ理論で記述される．この正体は何だろう．

最初に出会ったゲージ理論は電磁相互作用の理論だ．電気力と磁気力が荷電粒子にどのように働くかを記述する．マクスウェル理論によれば，空間のすべての場所に電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ が存在し，荷電粒子は電場，磁場を生成し，その電場，磁場が空間を伝播，別の荷電粒子がそれを感じて力が伝わるわけだ．

荷電粒子の運動はローレンツ方程式

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\Big\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\Big\} \tag{1}$$

で記述され，電場，磁場の時間変化はマクスウェル方程式

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \rho \\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{c}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

で決定される．これらの式は，古典論では，電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が実体であり，物理量であることを意味する．さらに，式 (2) から電場と磁場は電磁波となって空間を伝播することも帰結される．

ところがである．これらの式を作用原理から導こうとすると，一つのトリックが必要となる．電磁場をベクトル・ポテンシャル A^μ で表す必要があるのだ．4 次元的な表記 $x^\mu = (x^0 = ct, \boldsymbol{x})$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ で電磁場は

$$\begin{aligned} &F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\ , \\ &F_{0k} = E_k \ \ ,\quad F_{jk} = \epsilon_{jkl}B_l \end{aligned} \tag{3}$$

と表され，相対論的に不変な作用（action）は

$$\begin{aligned} I = -mc\int ds + \frac{e}{c}\int A_\mu dx^\mu \\ - \int d^4x\,\frac{1}{4c}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4}$$

となる．この作用が荷電粒子の座標 $x^j(t)$ の変分に対し停留値をとると要請すればローレンツ方程式 (1) が導かれ，電磁場のベクトル・ポテンシャル A^μ に対する作用の停留性からマクスウェル方程式 (2) の第 1 の組が導かれる．第 2 の組は $F_{\mu\nu}$ の定義 (3) から帰結される．

ここで注目すべき点は，(a) ベクトル・ポテンシャル A^μ を力学変数として変分をとらなければ作用原理からマクスウェル方程式が導き出されないこと，(b) 作用 (4) に A^μ があらわに現れること，である．運動方程式では見えない A^μ は，本当に必要だろうか．

2. ゲージ原理

ここには，隠れた対称性が秘めている．方程式も作用もゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \tag{5}$$

に対して不変なのだ．実際，$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ で運動方程式は変わらないし，作用 (4) の第 2 項でも $\int \partial_\mu \Lambda \, dx^\mu$ は線積分の上限と下限での値の差で表され，運動方程式，物理に影響を与えない．この事実を我々は「理論はゲージ不変である」と言う．

この不変性は偶然ではなく，もっと深い理由があるのではないか．ゲージ不変性は，絶対に守られねばならないのではないか．つまり，物理の原理の一つなのではないか．

物理で最も大切な原理は相対性原理だ．ガリレオによって定式化され，アインシュタインによって，特殊相対性原理，一般相対性原理に高められた．物理の基本法則はどんな観測系で見ても同じだ．どこでも，いつでも，動いていても，誰に対しても物理法則は同じ，つまり，普遍的なのだ．相対性原理と相入れないものは物理でない．

ゲージ不変性も原理として要求する．「作用は運動方程式に影響を与えない表面項を除いてゲージ不変である.」これをゲージ原理と言う．

相対性原理とゲージ原理を組み合わせると，相互作用の仕方さえもがかなり決まってしまう．電磁相互作用では，相互作用が局所的であることも要求すると，荷電粒子と電磁場の相互作用を記述する作用は (4) 以外にはあり得ないことになる．言い換えると，原理が相互作用まで決めてしまう．これはすごい．

3. 量子力学とゲージ理論

ゲージ原理はベクトル・ポテンシャル A_μ を基本的な力学変数と考えることを前提にする．それでも疑問は残る．A_μ は本当に必要か．電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ で話を済ませることはできないか．この問いに最終的な答えを与えたのが量子力学である．

電子の状態はシュレーディンガーの波動関数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ で表され，電磁場中の状態変化はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \right)^2 + eA^0 \right\} \psi \quad (6)$$

で記述される．この方程式はベクトル・ポテンシャル A_μ なしでは書けない．この方程式は，(5) のゲージ変換で

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left\{ i\frac{e}{\hbar c}\Lambda(x) \right\} \psi(x) \quad (7)$$

とすれば不変となる．逆に言うと，ゲージ原理は，(6) を要求し，電子の電磁場への相互作用の仕方を決める．

シュレーディンガーの波動関数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ は，電磁場と同じく時空の各点で値をもつ「場」である．一般に，電荷をもつ物質を場で記述するには，(6) と同じように，ベクトル・ポテンシャル A_μ が不可欠となる．

4. アハロノフ・ボーム効果

さらに，量子論においては，電磁場の効果は電場と磁場だけでは記述しきれないことが，シュレーディンガー方程式 (6) から帰結される．これはアハロノフ・ボーム効果と呼ばれる[1)]．ベクトル・ポテンシャルは，電場と磁場だけでは表しきれない物理的自由度を持っているのだ．この事実を “直感的” に表すと，量子論では不等式

$$\frac{A_\mu}{\text{ゲージ不変性}} \neq (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \quad (8)$$

となる．古典論では等号が成り立つ．

例として，図 1 のように磁束 Φ を持ったソレノイドの周りを電子が左から右に運動する状況を考えよう．ソレノイドの外側では電磁場はなく，電子はソレノイドの内側には入れないとする．古典論のローレンツ方程式 (1) によれば，$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = 0$ なので電子はソレノイドの内部の磁束の影響を受けない．

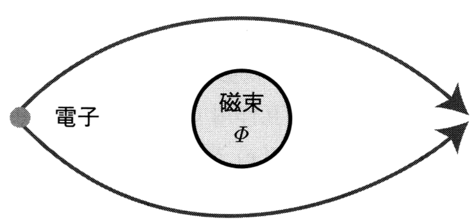


図 1　磁束 Φ を持ったソレノイドの周りを電子が運動する．電子は磁束 Φ の影響を受ける．

ところが，量子論では電子はシュレーディンガー方程式 (6) に従い，ベクトル・ポテンシャル A_μ の中を運動する．ソレノイドの外側でも A_μ は零ではない．実際，その角度成分 A_ϕ は，ソレノイドの中心からの距離を r として

$$A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi r} \tag{9}$$

となり，電子は磁束 Φ の影響を受ける．重要な量はソレノイドの周りを 1 周したときの線積分

$$\theta_{\mathrm{AB}} = \frac{e}{\hbar c}\int_C d\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{A} = \frac{e\Phi}{\hbar c} \tag{10}$$

で，アハロノフ・ボーム位相と呼ばれる．θ_{AB} の値が 2π だけずれても，物理的結果は変わらない．

電子がアハロノフ・ボーム位相 θ_{AB} の影響を受けることは外村たちの見事な実験で確かめられた[2]．この事実は，量子論では電磁場を記述するには電場，磁場だけでは不十分で，ベクトル・ポテンシャルが必要であることを意味する．

5. 素粒子を記述するゲージ理論

電磁相互作用がゲージ原理で支配され，規定されているのは美しい．1960 年以降の素粒子物理学の発展は，このゲージ原理が，強い相互作用，弱い相互作用をも支配していることを明らかにした．

拡張は簡単である．電磁相互作用におけるゲージ変換 (7) を

$$\psi'(x) = \Omega(x)\psi(x), \tag{11}$$

$$\Omega(x) = \exp\left\{i\frac{e}{\hbar c}\Lambda(x)\right\} \in U(1) \tag{12}$$

の形に書き直してみる．$\Omega(x)$ は $U(1)$ 群の元である．電磁相互作用は $U(1)$ ゲージ不変であり，それを記述するには $U(1)$ ゲージ場のベクトル・ポテンシャル $A_\mu(x)$ が必要となる．電磁相互作用は $U(1)$ ゲージ相互作用であると言う．

ここまでくると，$\Omega(x)$ を別の群の元に置き換えても理論的な整合性が保てる．例えば，$U(1)$ の代わりに $SU(2)$ や $SU(3)$ を考えてもよい．もちろんそのためには，物質場 $\psi(x)$ が 2 成分の $SU(2)$ 二重項，あるいは，3 成分の $SU(3)$ 三重項であると考える．同時に $SU(2)$（$SU(3)$）ゲージ不変性を維持するには，それに対応して $SU(2)$（$SU(3)$）ゲージ場を導入する必要がある．

$SU(2)$ 群へのゲージ場の拡張は，1954 年，Yang と Mills によってなされ，この理論は Yang–Mills 理論，あるいは，非可換ゲージ理論と呼ばれる[3]．1960 年代後半から 1980 年へかけての Yang–Mills 理論の進歩の過程は，自然界を支配する強い相互作用と弱い相互作用が，この理論によって記述されることが明らかになった過程でもあった．強い相互作用を記述するのは $SU(3)$ ゲージ理論であり，$SU(3)$ の自由度はカラーと呼ばれる．陽子，中性子を構成するクォークはカラーを持つ $SU(3)$ 三重項で，カラー・ゲージ場（グルーオン）を媒介にして強い相互作用をする．電子，ニュートリノなどのレプトンはカラーを持たない $SU(3)$ 一重項である．この理論は量子色力学（QCD）と呼ばれる．

弱い相互作用も電磁相互作用と一緒に統合することによって $SU(2) \times U(1)_{\mathrm{Y}}$ ゲージ理論で記述される．この場合は，後述する対称性の自発的破れを組み入れないと整合性のあるゲージ理論にならない．現在知られている素粒子の基本相互作用は，重力を除いて，すべてゲージ理論で記述される．

このことを我々は次のようにまとめる．自然は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_{\mathrm{Y}}$ ゲージ原理で支配されている．強い相互作用，電磁相互作用，弱い相互作用はその反映である．

どうして自然はゲージ原理を重んじるのか．答えはまだわからない．ここではとりあえず，ゲージ原理ありき，として出発することにしよう．

6. 統一理論と対称性の破れ

電磁相互作用は $U(1)$ ゲージ理論だが，弱い相互作用と統一されて $SU(2) \times U(1)_{\mathrm{Y}}$ ゲージ理論（電弱統一理論）となる．統一とは何だろう．電磁相互作用は光子（電磁波）を媒介にして，弱い相互作用は W ボゾンと Z ボゾンを媒介にして伝わる．$SU(2) \times U(1)_{\mathrm{Y}}$ ゲージ理論では，$SU(2)$ と

$U(1)_Y$ に対応する2つのゲージ結合定数 g_W, g_Y がある．光子，W ボゾンと Z ボゾンの様々な粒子への結合定数はこの2つの g_W, g_Y で決まる．さらに，W ボゾンや Z ボゾンは自分自身とも相互作用するが，この大きさも g_W, g_Y で決まる．ゲージ原理がこれらを全部決めてしまう．

統一理論では，少ないパラメータから多くのことが統一的に説明できる．つまり，一見違ったものが，一つの原理から説明できるのだ．さらに，量子補正も統一理論にしないと，きちんと計算できない．言葉を変えるなら，弱い相互作用の場合，電磁相互作用との統一は絶対に必要なのだ．

統一理論のもう一つの特徴は，統一により，いつでも対称性が高められることだ．電磁相互作用は $U(1)$ ゲージ対称性を持つ．電弱統一理論になると $SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ対称性を持つことになる．$SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ対称性は電磁 $U(1)$ ゲージ対称性より大きい．

ここで宿題が残る．統一することは素晴らしいが，現実の世界では高い対称性は実現されていない．つまり，$SU(2) \times U(1)_Y$ 対称性は $U(1)$ 対称性にまで壊れている．一体，この対称性の破れはどのようにして引き起こされるのか．これを説明できないと，統一理論にならない．

現在の標準理論では，ヒッグス場が対称性の破れの引き金になるとされている．このとき，もともとゲージ場で質量のなかった W ボゾンや Z ボゾンも大きな質量を得て，それに伴い，W ボゾンと Z ボゾンが媒介にする相互作用は観測されているように弱くなる．対称性の破れは，ヒッグス場 Φ のポテンシャル $V(\Phi)$ が図2のような形をしていることから引き起こされる．図2の例では $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ は複素場で，$V(\Phi)$ は Φ の $U(1)$ 位相変換 $\Phi \to \Phi' = e^{i\alpha}\Phi$ の下で不変である．つまり $U(1)$ 対称性を持っている．これは，ポテンシャルの中心軸の周りの回転対称性とも見なせる．

ところが，である．$\Phi = 0$（原点）の配位は $U(1)$ 対称だが，エネルギー的には極大値に対応し，物理的には不安定である．ちょっとした揺らぎのために，周りの円形の溝に落ちてしまう．安定なのは，エネルギーが一番低い溝の底である．しかし，安定な1点を選んでしまうと，その点は $U(1)$ 位相変換の下で不変でなく，$U(1)$ 対称性は壊れてしまう．このようにハミルトニアンの対称性が基底状態（真空）で実現されていないとき，この対称性は自発的に破れると言う．

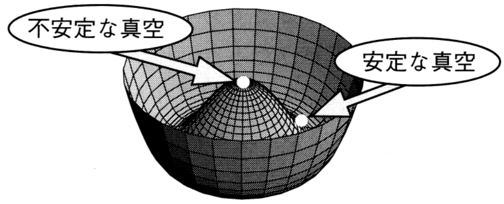


図2　ヒッグス場のポテンシャル．対称性の自発的破れが起こる．真ん中の山の上の対称な点は物理的に不安定である．

電弱統一理論では，$SU(2)$ 二重項の電弱ヒッグス場が $SU(2) \times U(1)_Y$ 対称性から $U(1)$ 対称性への自発的破れを引き起こす．さらに，大統一理論（GUT）では，強い相互作用（QCD, $SU(3)$ ゲージ対称性）までが統一される．一つの例は $SU(5)$ ゲージ理論で，その対称性の破れのパターンは

$$\boxed{SU(5)} \;\downarrow\; \leftarrow \text{GUT ヒッグス場} \;\; \boxed{SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y} \;\downarrow\; \leftarrow \text{電弱ヒッグス場} \;\; \boxed{SU(3) \times U(1)} \tag{13}$$

となる．各段階でヒッグス場が対称性を部分的に破り，小さくすると想定されている．

7. ヒッグス場は異端児か

このようにゲージ理論における相互作用の統一は，高い対称性を持った理論としてまとめられるが，統一は対称性の自発的破れと裏腹である．標準理論では，この高い（大きな）対称性と低エネルギーで見える低い（小さな）対称性を結びつけているのがヒッグス場である．

ゲージ原理の美しい点は，それが相互作用の仕

方まで決めてしまうことであった．では，ヒッグス場の相互作用はどうだろう．ヒッグス場はどんな原理で支配されているのだろうか．この点に関する答えは明確でない．現在の電弱統一理論では，ヒッグス場の種々の相互作用の結合定数は，対称性の破れのパターンやクォーク・レプトンの質量などが観測と合うように決めているだけである．

この点は満足できない．物理屋は，ヒッグス場の部分は「汚い」と表現する．ゲージ場と同じように，ヒッグス場を支配する原理はないものだろうか．

8. ヒッグス場もゲージ場

いろいろなアイディアがある．ここでは，その中の一つ，筆者が四半世紀前に大統一理論の枠組みで提唱し，近年，電弱理論に適用され，スイスにある研究所（CERN）の大加速器 LHC で検証できるかもしれないシナリオを説明しよう[4]．

ヒントは今までに述べたことに散らばっている．まず，我々が住む時空は，実は 4 次元だけでなく，5 次元目があると考える．この余剰次元が十分小さければ，日常の世界では見えない．さらに，この余剰次元は円周と同じく単連結でないとする．

この状況の下で，ヒッグス場に確固たる原理を与えることができる．ゲージ原理が重力以外の観測されている素粒子の相互作用を支配していることを上で見たが，ヒッグス場にも同じような原理を与えたい．どう考えたらよいか．

簡単である．ヒッグス場もゲージ場であるとすればいいのだ．この描像は余剰次元があれば実現できる．ゲージ理論を定義するには，ベクトル・ポテンシャル A_μ が必要であったことを思い起こそう．もし，5 次元目の空間があるとすれば，ベクトル・ポテンシャルは 4 次元成分 (A_0, A_1, A_2, A_3) と 5 次元目の成分 A_5 から成り立つ．4 次元成分は 4 次元時空でのゲージ場を含む．5 次元目成分は，4 次元のローレンツ変換の下でスカラー場のように変換し，4 次元のヒッグス場を含むことになる．

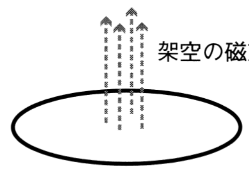


図 3　第 5 次元（円）：アハロノフ・ボーム位相 $\theta_{\rm H} \neq 0$ は円の内側に架空の磁束があるのと同じ．

単にこれだけでは，うまくいかない．ここで重要になるのが，5 次元目の空間が単連結でないという性質だ．上の第 4 節で，量子論ではゲージ場の効果は $F_{\mu\nu}$ だけでは記述しきれない，アハロノフ・ボーム位相 (10) の物理的自由度があることを説明した．5 次元目が円周の場合，この円周に沿っての一周積分

$$\theta_{\rm H} \sim \frac{g}{\hbar c} \int_C dx^5 \, A_5 \tag{14}$$

は物理的な自由度で，たとえ A_5 が定数でもゲージ変換で消去することはできない．つまり，余剰次元でのアハロノフ・ボーム位相となる．これは，図 3 で描かれているように，円の形をした 5 次元目の空間の真ん中に架空の Yang–Mills 磁束があるのと同じである．

素粒子の統一理論の場合，ゲージ群は非可換群で，アハロノフ・ボーム位相 $\theta_{\rm H}$ 自身がゲージ群の荷電をもち，一般に零でない $\theta_{\rm H}$ はゲージ対称性を自発的に破る．ちょうど (13) で記されたような対称性の破れのパターンが実現されるのだ．$\theta_{\rm H}$ は 4 次元のヒッグス場の役割を果たす．それだけではない．このアハロノフ・ボーム位相 $\theta_{\rm H}$ は 4 次元空間で揺らぐ．この揺らぎこそ，4 次元時空でのヒッグス場そのものなのだ．

こうして，ヒッグス場は 5 次元時空でのゲージ理論のゲージ場の一部となる．ヒッグス相互作用はゲージ原理と時空の構造により決まる．このようにしてゲージ・ヒッグス統合理論が実現する．現実の相互作用を説明するには，余剰次元として，平坦ではなく，曲がった空間を考えねばならない．

9. 有限温度理論からのヒント

もう一言述べておこう．アハロノフ・ボーム位相 $\theta_{\rm H}$ は本当に零でない値をとって，ゲージ対称性の破れを引き起こすだろうか．これは，量子効果によって実現される．筆者が最初にこのことのヒントを得たのは，それより少し前に勉強していた有限温度での QCD の振舞いからである．

有限温度 T での場の理論の振舞いは松原の方法で簡潔に調べることができる．時間 t を虚数時間 $\tau = it$ に置き換え，円周が $\beta = 1/k_{\rm B}T$ の円と考える．さらに，ボゾン場には周期的境界条件，フェルミオン場には反周期的境界条件を課す．例えば，フェルミオン場は $\psi(\boldsymbol{x}, \tau+\beta) = -\psi(\boldsymbol{x}, \tau)$ を満たす．これで様々なグリーン関数や自由エネルギーを計算すればいいわけだ．

有限温度では熱的励起がある．ゲージ理論の場合，熱的励起のためにプラズマ状態になる．その中を伝播するゲージ場には遮蔽効果が起こる．相対論的に言うと，ゲージ場が温度に比例した有限の質量（$m(T)$）を得ることになる．

有限温度の場の理論は，数学的には，3 次元のユークリッド空間 R^3 と虚数時間に対応する円 S^1 の積からなる 4 次元空間 $R^3 \times S^1$ 上の場の理論と見なすことができる．前節で議論したゲージ・ヒッグス統合理論は，一つの例として，4 次元のミンコフスキー時空と余剰次元の円 S^1 の積からなる 5 次元時空上のゲージ理論である．物理の理論は Wick rotation といって，時間を虚数軸に回転してもよい．すると，5 次元空間 $R^4 \times S^1$ 上のゲージ理論となる．

これは似ている．違いは，フェルミオン場が S^1 上でみたす境界条件にある．有限温度理論では，フェルミオン場は反周期的でなければならない．しかし，ゲージ・ヒッグス統合理論では，別に周期的境界条件を課しても悪くない．この場合，4 次元のゲージ場に対する遮蔽効果はどうなるだろうか．これは，有限温度理論でフェルミオン場に間違った境界条件を課して，つまり，ひねりを入れて調べてみればよい．すると，遮蔽どころか，ゲージ場の質量の 2 乗が負になる（$m^2 < 0$）という非物理的な結果が得られる．

これは何を意味するか．ゲージ・ヒッグス統合理論の言葉に直せば，$m^2 < 0$ は出発した真空が不安定であることを意味する．正しい真空はどこか他の配位（$\theta_{\rm H} \neq 0$）にあるのだ．とすれば，非可換ゲージ理論では，ゲージ対称性が部分的に破れることになるに違いない．有限温度理論の熱励起は，高次元ゲージ理論の余剰次元での量子揺らぎに対応する．余剰次元でのアハロノフ・ボーム位相 $\theta_{\rm H}$ の量子効果によるダイナミックスがゲージ対称性の自発的破れを引き起こす．

10. 最後に

ゲージ原理，余剰次元，アハロノフ・ボーム効果，ひねった有限温度理論，これらのアイディアが絡まって，電弱統一理論のヒッグス場が実はゲージ場そのものであるというゲージ・ヒッグス統合理論にたどり着く．LHC でヒッグス粒子を見つけ，その性質を調べるのが待ち遠しい．

参考文献

1) Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (1959) 485.
2) A. Tonomura *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 792.
3) C.N. Yang and R. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.
4) Y. Hosotani, *Phys. Lett.* **126B** (1983) 309.

（ほそたに・ゆたか，大阪大学大学院理学研究科）

超弦理論の成り立ち

石橋 延幸

1. はじめに

すべての物質の基本的構成要素である素粒子が点ではなく実は長さを持った弦であるという超弦理論が活発に研究され始めたのは1984年のことです．それ以来，非常に多くの素粒子理論研究者がこの理論の研究を活発に行ってきました．今では，この理論に関する非専門家向けの本[1)]・記事[2)]も多く書かれており，専門家以外の人もどこかで耳にしたことのある理論になってきたようです．例えば，大学で高校生向けの公開講座を開いた際などに話を聞くと，「将来はこの理論を研究してみたいんです」と目を輝かせる高校生に何人も出会ったりします．

一方で，この理論はまだ仮説であり，実験で検証されたわけではありません．20年余り研究しても未だ現実の素粒子を記述する模型に到達していないではないかという批判もあります．また，現在の超弦理論の研究は非常に多岐にわたるものになっている上に，ある程度の基礎知識を仮定しないと説明しにくい代物です．そこで，最近の発展・応用については他の特集・記事を見ていただくことにして，この稿では，この理論の成り立ちについて書いてみようと思います．この理論の背後にはどんな物理的考え方があるのかを見ていくことにしましょう．

2. 点粒子とスピン

弦理論について説明を始める前に，まず従来の点粒子の性質について説明しておかなければなりませんので，しばらくの間ちょっとがまんして読んで下さい．

•

図1 点粒子.

点粒子とは文字通り，図1のように大きさのない点です．点自体には何の構造もないのですが，世の中には様々な属性を持った点粒子が存在しています．点粒子の最も基本的な属性は質量とスピンと呼ばれる量です．

スピンとは向きを持った量で，粒子はスピンの向きで区別されるいくつかの状態を取り得ます[3)]．大雑把に言えば，粒子にはスピンの向きで区別されるいくつかの種類があるということになります．例えば，電子はスピンの大きさが $\frac{1}{2}$ で，そのような粒子はスピンの状態が2種類あることが知られています．あるいは，現在LHCと呼ばれる加速器で発見されると期待されているヒッグス粒子はスピンの大きさが0つまりスピンのない粒子で，言い換えるとスピンの状態が1種類しかない粒子です．

電子もヒッグス粒子も質量のある粒子なのですが，これから主に考えたいのは質量が0の粒子です．質量が0の粒子の場合，スピンは粒子の進む方向に沿った向きしか取り得ません．そこで，スピンの代わりに，スピンを進行方向に射影したへ

リシティーと呼ばれる量を用います．例えば，光は光子と呼ばれる質量 0 の素粒子に対応しています．光子はヘリシティーの大きさが 1 の粒子で，光子にはスピンが進行方向と同じ向きであるヘリシティーが +1 のものと，スピンが進行方向に反対であるヘリシティーが −1 のものの 2 種類の状態があります．

これら粒子のスピンに関する事実は，素粒子の世界を記述する理論の基礎になる相対論と量子論から導き出されます．相対論と量子論を仮定するとこの世界に存在する点粒子は一般にその質量とスピンで分類されることがわかります．特に質量が 0 でスピンが 0 でない粒子の場合はスピンが進行方向に平行，反平行の 2 つの状態しか取り得ないということが，この 2 つの理論から導き出されるのです．

■ 3. 場 ■

前節では光は光子であると述べましたが，一方，光は電磁場の波とも考えられます．光は粒子と考えても波と考えてもどちらでも良いのです．従って，光子という粒子は電磁場という場を用いて記述することができます．

電磁場はベクトルポテンシャル

$$A_\mu(x) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{1}$$

という 4 成分の場で記述されています．μ のように場についている添え字を足と呼びます．電磁場の足には意味があって，$\mu = 0$ が時間に，$\mu = 1, 2, 3$ が空間の 3 方向に対応しています．このような 4 成分の場をベクトル場と呼びます．この電磁場の理論をうまく扱ってやると，電磁波が光子に対応していることを導き出すことができます．

実はどんな粒子にもそれを記述する場が存在し，その場の理論をうまく扱ってやると対応する粒子を導き出すことができるのです．例えばヒッグス粒子は

$$\phi(x) \tag{2}$$

という 1 成分のヒッグス場と呼ばれる場に対応していることがわかります．ヒッグス場のように足のない 1 成分の場をスカラー場と呼びます．

■ 4. ゲージ対称性 ■

ここまで述べたことで，点粒子には粒子としての記述と，場としての記述の 2 つの見方があるということになりました．1 つのものに 2 つの異なった見方があると，人間社会では紛争の種になりますが，物理や数学の世界では新たな発展の種になります．片方の見方では自明にわかることが，もう一方の見方では誰にも解けない問題だったりするからです．

粒子のスピンを場の見方で見るとどうなるかを考えてみましょう．ヒッグス場 $\phi(x)$ は足のついていない 1 成分しかない場でした．これは，ヒッグス粒子がスピンの状態が 1 種類しかない粒子であることに対応しています．スピンの状態の種類は場の成分の数と関係しているわけです．しかし，電磁場を同じように考えると一見勘定が合わなくなります．電磁場は 4 成分あるので，素朴に考えれば自由度としてはヒッグス場の 4 倍あるはずで，光子の状態も 4 種類あるように思えます．

実は電磁場の理論にはゲージ対称性と呼ばれる対称性があり，そのおかげで勘定が合います．ゲージ対称性とは任意関数 $\epsilon(x)$ に対して

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \epsilon(x) \tag{3}$$

と変換しても理論が変わらないということです．この対称性のおかげで電磁場の自由度が減って，光子は 2 種類しかないということになります．実際，ゲージ不変性のおかげで光は横波であるということが導き出されます．横波の場合，変位の方向は進行方向に垂直な 2 つの独立な方向しかありません．前節で述べた光子の 2 種類の状態は，この 2 つの方向に対応しているのです．従って，光子に対応する場の理論を作ろうとすると，ゲージ対称性と呼ばれる対称性を持つ理論を作る必要があるのです．

もし，仮に電磁場の理論にゲージ対称性がなかったらどうなるでしょうか？ 前に述べたように，相対論と量子論を仮定すると光子のような質量 0 の

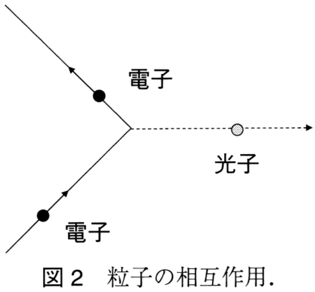


図２　粒子の相互作用．

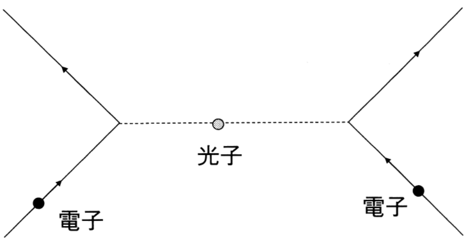


図３　電磁相互作用．

粒子はヘリシティー ±1 の２種類しかないということが導かれるので，ゲージ対称性のない電磁場の理論を考えるとどこかに矛盾が起こってしまうはずです．

ゲージ対称性のない理論を作る一つの方法は，ゲージ対称性を破る相互作用の入った理論を考えることです．点粒子は空間的には大きさがないので，時間と空間を合わせて考えた４次元時空の中ではその軌跡は線になります．この線は粒子の世界線と呼ばれます．粒子の相互作用は図２のようにいくつかの粒子の世界線が１点で交わる過程で表されます．例えば，光子は電子と図２で表されるような相互作用をしています．このような相互作用はもちろん場で記述することもできます．この相互作用の効果を勝手に取るとゲージ対称性を破ってしまいます．このようにしてゲージ対称性を破る相互作用の入った理論を考えると，これまでの議論から，どこかに矛盾が出ることが予想されます．実際，そのような理論から粒子の状態を作ると，通常負の確率を持つ状態が出て来てしまいます．

逆に言えば，矛盾のない理論を作るには相互作用はゲージ対称性を保つようにとらなければならないということになります．従って，光子が相互作用しているとすると，その相互作用はゲージ対称性を保つようになっていなければならないのです．

光子は電子のように電荷を持っている粒子と相互作用します．実は，電磁相互作用は光子によって媒介されています．２つの電子の間に働く電磁気力は，図３のように２つの電子が相互作用によって光子をやりとりする過程によってもたらされるのです．従って，電磁気力はゲージ不変性を保つような形になっていなければならないのです．つまり，光子という粒子が矛盾なく記述できるという条件から，電磁気力の働き方に制限がつくというわけです．

■　5. ゲージ対称性の威力　■

ゲージ対称性を保つという制限は非常に厳しいもので，多くの場合この条件から相互作用の形はほとんど決まってしまいます．例えば，素粒子論で出て来る力のうち電磁気力，弱い相互作用，強い相互作用は，光子の場合と同じようにゲージ対称性をもつベクトル場の理論で記述されています．このような理論をゲージ理論と呼びます．ゲージ理論の相互作用はゲージ対称性を保つという条件によって決まっています．

一般に質量が 0 でスピンが 1 以上の粒子とそれに対応する場については同様のことが成り立ちます．例えば，重力は重力子と呼ばれる質量が 0 でヘリシティーが ±2 の粒子によって媒介されると考えられています．この粒子に対応する場は

$$h_{\mu\nu}(x) \qquad (\mu,\nu=0,1,2,3) \tag{4}$$

と足の２つついたテンソル場と呼ばれる場になります．ベクトル場に比べて足の数が２倍になったのはヘリシティーが２倍になったことに対応しています．ただし，$h_{\mu\nu}$ は μ と ν の入れ替えについて対称だという条件がついています．それでも，この場はスカラー場の 10 倍の自由度があるように思えるのですが，重力子は前に述べたように２種類の状態しか取り得ません．ということは，ベクトル場の場合と同様にゲージ対称性によってこのつじつまがあっていなければならないということになります．この条件はこの場合も非常に厳しいものになります．実は，ヘリシティーが ±2 の

粒子についてゲージ対称性を保つ相互作用を含んだ理論を作ろうとすると，（いくつかの条件の下で）その理論はアインシュタインの作った重力理論である一般相対論になってしまうことが証明されているのです[4)].

一般相対論は重力を時空の幾何学と結び付ける美しい理論です．また，ゲージ理論で出て来るベクトル場 A_μ は幾何学で出て来る接続と呼ばれる量になります．一見幾何学とは全く関係ないような粒子から出発して，相対論と量子論に矛盾しないように理論を作っていくと，このような幾何学で出て来る概念に到達するというのです．自然がそうなっているのだとは言え，この事実には，非常に不思議で深遠なものを感じませんか？ なおかつ，この世界に存在する4つの力すべてがこのようなゲージ対称性を持つ理論によって記述されているのです．

観測されてはいませんが，原理的には更にスピンの大きな粒子について同じことを考えることが可能です．質量が0でスピンの大きさが2より大きい粒子の理論を作ろうとすると更に難しくなります．そのような粒子に対応する場はたくさんの足を持っており，大きなゲージ対称性が必要になるからです．このような理論を作ろうと試みると，スピンの異なる無限個の粒子を含む理論にならざるを得ないことがわかります[5)]．そのような理論で実際に作られたものはこれまで数例しかありません[6)].

6. 弦理論

さて，いよいよ本題の弦理論に入ることにしましょう．弦の理論を考えるには，今まで点だったものを弦に置き換えればよいことになります．つまり，点の代わりに図4のように閉じたあるいは開いた弦を考えて，相対論と量子論をもとに理論を作ってみるわけです．このようにすると，質量が0の点粒子についてここまで議論してきたことと同様なことが，より劇的な形で起こります．

まず，点粒子の理論と弦の理論のどこが違うかを



図4　閉じた弦と開いた弦.

説明しましょう．点の代わりに弦を考えると著しく違うのは第一に次のような点です．弦とは図4のように広がったものであるので，弦は空間の中でいろいろな形を取り得ます．従って，弦の理論を作ろうとすると弦の形に対応した無限個の量を指定しなければなりません．点粒子のときは，点には構造がなかったにも関わらず，スピンで区別されるいろいろな種類の粒子を考えました．弦の場合は最初から無限個の種類が存在せざるを得ないのです．

実はこの無限個の種類の弦の状態を無限個の違う種類の点粒子と考えることができます．弦理論には弦の長さに対応したパラメタ l_s があり，弦の長さは大体この l_s のオーダーになるように理論が作られています．我々が，弦の理論を素粒子を記述する理論として使おうとするときはこの l_s が我々が現在の実験で観測している長さに比べて非常に小さいと考えます．このため我々は弦に長さがあることに気づかずに，素粒子は点であると考えているというわけです．この場合，様々な形の弦は無限個の違う種類の点粒子のように見えます．実際に弦の理論を作ってみると，そこには様々なスピンと様々な質量を持った無限個の粒子が含まれていることがわかります．

7. 弦の相互作用

弦の理論が点粒子の理論と違うもう一つの点は，相互作用の仕方です．長さを持った弦が時空の中を走ると今度は世界面という面ができます．点粒子の場合，相互作用は粒子の世界線がぶつかることでしたが，弦の場合に同様な図を描くと図5のようになります．この図は点粒子の場合と著しく違います．点粒子の場合は相互作用が起こった点では違う粒子の世界線がぶつかっているので相互作用が起こった点がはっきりと定義できます．この点で起こる過程を変えることで，理論を変える

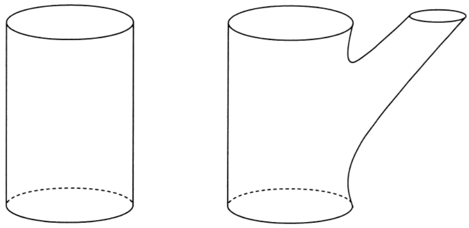


図 5　弦の世界面と相互作用.

ことができました．ところが，弦の場合は相互作用が起こっても世界面は滑らかで，どの点で相互作用が起こったかがはっきりしません．世界面の一部に注目するだけでは相互作用が起こっているのかいないのか区別がつかないわけです．つまり，弦理論では相互作用は自然に起こってしまうのです．弦の理論の場合，相互作用は理論を作った段階で自然に含まれてしまい，勝手に手で変えることのできない過程なのです．

8. 弦理論の成り立ち

さて，弦の理論を粒子の理論の場合と同じように作ろうとすると，この場合も相対論と量子論からその状態に制限がつきます．また，弦に対しても対応する場の理論を考えることができます．この場の理論の自由度と弦の状態の数を比べると，一見勘定が合わないので，点粒子の場合と同じようにゲージ対称性が存在していなければならなくなります．上に述べた「弦の無限個の状態が無限個の粒子に対応している」という事実から推察できるように，ゲージ対称性を用いて減らすべき自由度の数は無限大になります．従って，この理論には無限個のゲージ対称性が必要になります．

このゲージ対称性は弦の理論に非常に強い制限をつけます．粒子の場合はゲージ対称性は粒子の相互作用の仕方に制限をつけました．ところが，上に述べたように弦の場合は理論が自然に相互作用を含んでいるため，このゲージ対称性を保つという条件は理論自体に非常に強い制限をつけます．この条件のおかげで，理論自体がほぼ決まってしまうだけではなく，弦が住んでいるべき時空の次元まで決まってしまうのです．

このようにゲージ対称性を保つ，矛盾のない弦理論としては，26 次元時空のボゾン弦理論と，10 次元時空の超弦理論が 5 種類知られています．これらの弦理論はいずれも有限個の質量が 0 の粒子と，無限個の質量を持った粒子を含む理論です．そして，この有限個の質量が 0 の粒子の中に，必ずスピンの大きさが 2 の粒子があります．前に述べたようにこのような粒子は必然的に一般相対論に現れる重力子になってしまうので，弦の理論は重力を含んだ理論になります．また，理論によっては質量が 0 でスピンの大きさが 1 の粒子を含むものがあり，重力以外の 3 つの力を記述するのに使えるのではないかと考えられます．このことから，この理論を用いて重力を含んだ素粒子の統一理論を作ろうというアイディアが生まれたのです[7]．

9. 弦の場

このようにして物理学者は弦の理論というものに到達しました．ただし，話はこれで終わるわけではありません．点粒子の場合は，質量のないスピンが 1 や 2 の粒子の理論を作ると，ゲージ理論や一般相対論のような，幾何学の概念を用いるとうまく理解できる理論になりました．同じように考えれば，弦理論も何らかの幾何学を用いることによって理解できると考えられます．このように理解して初めて，我々は弦理論を本当に理解したと思えるのです．弦理論の場合は，ゲージ理論や一般相対論のゲージ対称性を含む無限次元のゲージ対称性を持つ理論なので，対応する幾何学もこれまでの幾何学を拡張した何か新しい幾何学になると考えられます．スピン 1 の粒子の場合は，この粒子を記述する場であるベクトル場 A_μ が接続になりました．スピン 2 の場合，対応する場 $h_{\mu\nu}$ を計量テンソルの揺らぎと考えることで，時空の幾何学との関係がつきます．従って，弦の場合も弦の場というものを調べていけば，我々の時空の概念を拡張するような新しい描像に到達できるのではないかと考えられます．

弦の場を考えるには粒子の場合の手続きを拡張

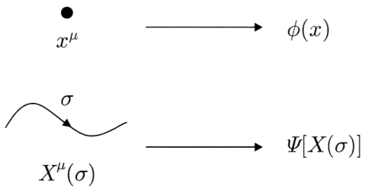


図6　弦の場.

します．スピンのない点粒子の状態は基本的にはその点の座標 x^μ で決まります．それに対応して，そのような粒子を記述する場はこの x^μ の関数 $\phi(x)$ になります．一方，弦の状態は図6のように弦の上に座標 σ を考えると，弦の上の σ に対応する点の時空での座標を与える関数 $X^\mu(\sigma)$ によって決まります．従って，粒子の場合を拡張すれば，弦に対応する場はこの関数の汎関数 $\Psi[X(\sigma)]$ になると考えられます．このような汎関数を用いて理論を作っていけばいいはずです．

このような方法で弦の場の理論を作ろうという研究は，弦理論の研究が活発になった当初から大きな研究テーマでした．しかし，現在に至るまで，誰もが納得する弦の場の理論の定式化はできてはいません．もしかしたら，弦の理論は弦とは違う自由度をもとに定式化すべきなのではないかという考え方もあります．弦の理論は，点を弦に拡張するという素朴な考え方で作られてきたわけですが，我々は未だその全貌をつかんでいないのです．

参考文献

1) 例えば，川合光：『はじめての〈超ひも理論〉』．講談社現代新書 (2005); 橋本幸士：『D ブレーン』．東京大学出版会 (2006).
2) 例えば，数理科学 2005 年 10 月別冊「スーパーストリング」.
3) スピンについてより詳しく知りたい場合は，特集「スピンはさらにめぐる」数理科学 2001 年 7 月号.
4) これについては多くの論文がある．例えば，S. Deser, *Gen. Rel. Grav.* **1**, 9 (1970) [arXiv:gr-qc/0411023].
5) F.A. Berends, G.J.H. Burgers and H. van Dam, *Nucl. Phys. B* **260**, 295 (1985).
6) M.A. Vasiliev, *Phys. Lett. B* **243**, 378 (1990).
7) T. Yoneya, *Prog. Theor. Phys.* **51**, 1907 (1974); J. Scherk and J.H. Schwarz, *Nucl. Phys. B* **81**, 118 (1974).

（いしばし・のぶゆき，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

Summer School「数理物理 2008」
リッチフローの微分幾何と位相幾何

日時： 2008 年 9 月 27 日（土）午後～30 日（火）
会場： 東京大学大学院数理科学研究科大講義室（駒場キャンパス）

講師と講演題目：
石田政司（上智大・理工）
リッチフローと 4 次元異種微分構造
伊東恵一（摂南大・工）
数理物理的（繰りこみ群の）視点からみたペレルマンの論文について
小島定吉（東工大・情報理工）
ポアンカレ予想と幾何化予想
小林亮一（名大・多元数理）
非局所崩壊定理—背景・証明・例—

定員： 申込み順で先着 200 名です．（これは会場の都合によるものですが，今まで定員を超えたことはありません．）

参加費： 3,000 円を当日に会場受付で集めます．予稿集（当日配布），茶菓代などの実費にあてます．また，前年までの予稿集の残部について，当日販売する予定です．

参加申込み： 9 月 10 日までに，氏名，所属，身分，e-mail address または連絡先の住所を明記して，e-mail またはハガキで下記あてに申し込んでください．E-mail は題名を Summer School としていただけると整理の都合上助かります．E-mail の申し込みについては確認のお返事をします．ただし河東の海外出張中は返事が遅れることがあります．その他は，定員を超えた申込みにのみ連絡します．電話での問合せにはお答えしかねます．

連絡先： 〒 153–8914 目黒区駒場 3–8–1
東京大学大学院数理科学研究科　河東泰之
E-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

なお，最新の情報については，
http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/mp2008.htm
をご覧下さい．

世話人：小嶋　泉，Izumi Ojima（京大数理研）
河東泰之，Yasuyuki Kawahigashi（東大数理）

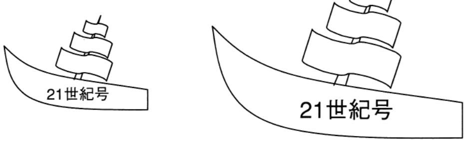
繰り込み群と臨界現象

川上　則雄

1. スケールの消えた世界

長さの目安を与える物差し「スケール」は，私たちの日々の生活に欠かせないものである．鯨は大きいとか蟻は小さいとかふだん口にするが，このときは無意識のうちに人の大きさをスケールにしているように思われる．もしも，このようなスケールがなくなってしまったら，どのような世界が見えるのであろうか．その例として，静かな大海原にぽつんと浮かんだ船を想像してみよう（図 1)．海は平穏であるとすると，周りに目印がないので西も東も分からないし，少々移動しても何の変化もない．さらには，この船を遠くから眺めてみたとき，それが小さな船 (a) なのか大きな船 (b) なのか区別することは難しい．近くに大きさを測れる物差しがないからである．これが，いわゆる「スケールの消えた」世界である．

このようなスケールの消えた世界は物理現象で



(a)　　(b)

図 1　スケールの消失：大海原では船の大きさは分からない（スケール不変性)．このようなスケールの消えた世界は相転移の臨界現象に現れる．

もしばしば実現される．その典型例が，相転移における臨界現象である[1~5]．物質の相転移というのは，温度などを変えたときに物質の相（状態）が変わる現象である．ちょうど相が変わる点においては，長さのスケールが無限大になり物差しがなくなってしまう．このようなスケールがなくなった点で生じる臨界現象は，我々が大海原で経験することとよく似ている．例えば向きを変えても，少し移動しても周りの様子は同じで（回転，並進不変性)，さらには物差しの尺度を変えても物事は変わらない（スケール不変性)．

臨界現象は物理学の基礎概念として確立されており，ここには素粒子とか物性とかいった分野の垣根を超えた普遍的な性質が浮かび上ってくる．臨界現象の理論は，表題に記した繰り込み群の方法によって具体化される[1~5]．現代物理学に現れる興味深い現象は，多粒子が相関を持ちながら集団運動することにより生じる「多体効果」によって生み出されることが多い．一方で，この多体効果はその取扱いの難しさゆえに，理論物理学にしばしば筋金入りのチャレンジングな問題を投げかける．以下では，このような問題が「臨界現象」という見方をすることで華麗に解かれた 2 つの例を紹介する．その前に，臨界現象と繰り込み群について簡単におさらいしよう．

2. 臨界現象とユニバーサリティ

ここで，身近な例として磁石を考えてみる（図2）．磁石のもととなっているのは結晶の格子点に局在した電子スピン（磁気モーメントをもつ）である．高温では熱ゆらぎでバラバラに向いているスピンが，温度の低下とともに同じ向きに揃い始める．スピンが揃っていると見なせる範囲は相関距離と呼ばれるスケール ξ で特徴づけられる．磁石になる温度（転移点あるいは臨界点）では結晶格子全体にわたってスピンが揃うため，この相関距離が無限大になる．ここに現れるのが，大海原で見られるような「スケールの消えた」現象，いわゆる臨界現象である．

このようなスケールの消失を最もイメージし易いのは，幾何学でフラクタルと呼ばれている図形である．フラクタル図形では，海岸線の形に代表されるように凸凹とした図をズームアップしてみても，やはり似たような凸凹が現れ，さらにズームアップしても同じような図形が見える．自己相似と呼ばれる性質である[1~5]．

物質はそれぞれ特有の結晶構造や相互作用をもつので，一般にその物性は結晶構造などのパラメタに強く依存すると考えられる．しかし，相転移温度（臨界点）に近づいていくと相関距離が長くなっていくため，この距離より短い構造は次第にならされてゆく．臨界点に到達すると，もはや物理現象は個々の細かい構造によらない普遍的（ユニバーサル）な性質を示すようになる．ここではフラクタル性が自然な形で実現される．このようなユニバーサルな現象は，系の次元や対称性などの基本的なパラメタのみに依存する．したがって全く異なると思われる物質が，相転移点において同一の臨界現象を示すということが生じる．臨界現象の分類にはユニバーサリティクラスという言葉が用いられる[1~5]．例えば，統計物理にしばしば登場するイジングモデルは磁石の最も簡単化されたスピンモデルであり，このモデルが磁石になるときの臨界現象は「イジングのユニバーサリティクラス」と呼ばれる．驚くべきことに，よく知られている気体・液体の一次転移の臨界（終端）点はイジングクラスに分類される．また，電子系の有限温度での金属・絶縁体転移の臨界（終端）点もイジングクラスとなる．このように，一見異なったように見える系が同じユニバーサリティクラスに分類されることは感動的である．

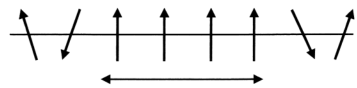


図2　相関距離．臨界点で無限大となる．

以上のことからも推察できるように，臨界点におけるスケール不変性そのものが臨界現象を特徴づける．また，この性質は種々の物理量がどのように臨界点に近づいていくかということとも直接関係している．これらのことを具体的に取り扱える方法が繰り込み群である．

3. 繰り込み群

上記のスケール不変な系の性質は，スケール変換を繰り返すこと（繰り込み）で明らかにすることができる[1~5]．今，長さ L の物理系を考え，その性質があるパラメタ J で特徴づけられるものとする．以下では繰り込み群の慣わしに従って J を結合定数と呼ぶことにする．ここで，長さのスケールを L から $L' = L + \Delta L$ へと変化したとき，物理そのものは何も変化せず，結合定数が J から $J' = J + \Delta J$ へと変化したものとみなせると仮定しよう．この「J の繰り込み」にスケールの変化が吸収できるとみなすわけである．すると，微小なスケール変換に対して，次のような微分方程式が立つことが容易に想像できる．

$$\mathrm{d}J/\mathrm{d}L = -\beta(J). \tag{1}$$

これが繰り込み群方程式ないしはスケーリング方程式と呼ばれるものである．右辺に現れる J の関数 $\beta(J)$ は文字通りベータ関数と呼ばれ，この関数形が臨界現象の性質を決定する．

ここで，L を大きくしていったときの J の振

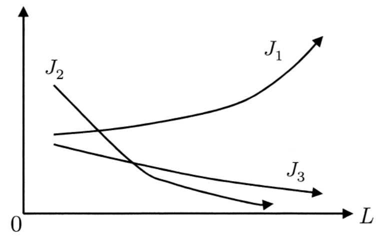


図 3　繰り込み群のフローの概念図．J_1 (J_2, J_3) は relevant (irrelevant) である．

舞いは繰り込み群の流れあるいはフロー（flow），また行き着く先は固定点（fixed point）と呼ばれる．繰り込み群のフローには，いくつかのパターンがある（図 3）．まず，繰り込みによって J の絶対値がどんどん大きくなる場合，この結合定数（正確には対応する演算子）は relevant であると言われる．この場合は強い結合を持つ「強結合固定点」にたどりつき，その性質には J が決定的な役割を果たす．一方，J がゼロに繰り込まれていく場合 irrelevant と呼ばれ，弱結合の固定点へと行き着く．ここでは，J はその効力を完全に失ってしまう．また，J の符号によって強結合/弱結合と行き着く先が異なる場合もあり，marginal と呼ばれる（例えば $\beta(J) \sim J^2$ のとき）．このような固定点がそれぞれのユニバーサリティクラスを特徴づける．

現実の系に対応したミクロな模型には，出発点として多種の結合定数が含まれているが，繰り込みの過程でその多くは消えてゆき，ごく少数の relevant な結合定数が臨界現象のクラスを決定することになる．一見全く異なる物質が，臨界現象として同じユニバーサリティクラスに分類されるのは，以上のような理由による．

繰り込み群や臨界現象の考え方は，物理学の広い分野で多くの成果をあげてきた．しかしながら，物理学の難問であるところの「多体問題」を正確に解くことは，繰り込み群と言えどもほとんどの場合不可能である．このような中で，低次元多体問題で「厳密に解ける」著しい場合がある．そこでは繰り込み群や臨界現象の考えが真骨頂を発揮する．「臨界現象」として物理をとらえることにより多体問題が正確に解かれ成功を収めた例を以下に 2 つ紹介しよう．物理を見る「視点」の大切さを教えてくれる格好の例である．

4. ストリング理論と 1 次元電子系

まずは，1 次元の多体問題の話から始めよう[8)]．臨界現象という立場から物理現象を見直してみると，異なる分野の異なった現象が同じ舞台に上がってくる．この代表例が，素粒子論におけるストリング（弦）と物性物理における 1 次元電子系である．このアナロジーをフルに利用することで，物性物理における特筆すべき研究の進展が 1990 年前後にあった．素粒子物理学では，1980 年代半ばからストリング理論が話題の中心となっていた[6,7)]．素粒子は極微の世界で 1 次元的な拡がりをもつ「弦」に見えるというものである．弦は時空内の運動の軌跡として 2 次元（時空 1＋1 次元）の世界面を描く．図 4 に示したのは，開いた弦と閉じた弦の時空での運動の奇跡である．ストリング理論では，この弦の振動を量子化することにより現実の素粒子が見えてくると考える．この弦の張る世界面を記述するために 2 次元座標を設定するが，弦の物理は，この 2 次元座標系の選び方によらない．これは「共形不変性」と呼ばれているものである．この共形不変性を持つ場の理論は「共形場理論」と呼ばれ[8,9)]，ストリング理論の核をなす重要なものである．

驚くべきことに，このような共形不変性は 1 次元方向に運動が拘束された電子系（1 次元電子系）にも現れる[8)]．1 次元電子系の典型例としては，カーボンナノチューブや半導体で作成された人工的な

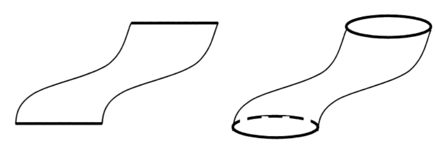


図 4　弦の時間発展による世界面：(a) 開弦 (b) 閉弦．

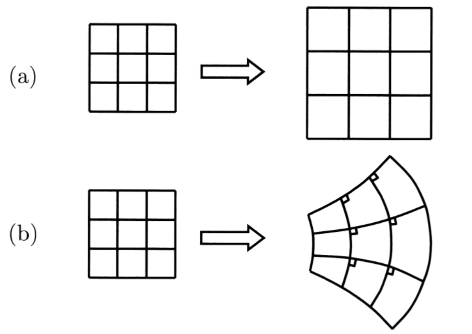


図5 (a) 一様なスケール変換．(b) 共形変換（局所的スケール変換）．共形変換は角度を保存する任意の変換（等角写像）である．

量子細線などがあり，物性物理学を中心とした最先端ナノサイエンスの研究舞台を提供している．このような1次元電子系では，絶対零度で相関距離が無限大となり臨界点が実現される．すなわち，高温で激しく運動していた電子が，温度の低下とともに次第に静かになってゆき，絶対零度では静寂な海に似た量子の世界にたどりつく．そこでは時空からなる2次元平面にスケール不変性が現れる（図5(a)）．これは図1で見た「一様なスケール不変性」である．さらに著しいことに，2次元平面の各点で局所的にスケールを変えても物理の本質は変わらないという「局所的なスケール不変性」が現れる（図5(b)）．実は，これが上記の「共形不変性」に他ならない．

このように，物理的背景はかなり異なるものの，素粒子のストリングと1次元電子系の臨界現象が共形場理論という同一の理論の枠組みで記述されることになる[8]．開弦（閉弦）はひも（リング）状の1次元電子系に対応する（図4）．ここで，図5(b)から推察されるように，共形変換には無限個の種類があり，これの生み出す対称性は無限次元である．この無限次元の対称性が，共形場理論の強力な数学的手法（無限次元リー代数）を与えてくれる．これを用いることで，従来の固体電子論の手法では計算が難しかったような物理量（相関関数の臨界指数）が1次元電子系で正確に計算された[8]．

物性と素粒子，異なる流れの中で着実に育まれてきた基本テーマが結びつき，1次元電子系の普遍概念の基礎が固められた．この研究でのポイントは，1次元電子系を「臨界現象」におけるユニバーサリティの観点から見直したことにある．分野を超えた多角的な見方が新たな進展をもたらすこと，これは物理に限らず科学全体に共通の「ユニバーサルなできごと」のように思われる．

5. Wilsonの繰り込み群：近藤効果の「厳密解」

上記の話題は，臨界点直上における性質を対象とした理論であり，そこに現れる共形不変性をフルに活用したものである．この節では，臨界点のみならず，そこから外れたクロスオーバーの振舞いまで含めて正確に解かれた「近藤効果」を紹介する[10,11]．繰り込み群の基礎を構築したWilson自身が，独自のアイデアを駆使して華麗に量子多体問題を解いた著しい成果である．この成果はWilsonをノーベル賞へと導いた．以下に，近藤効果のエッセンスとWilsonのアイデアを見てみよう[12]．

近藤効果は，金属中に混入した希薄な磁性不純物が引き起こす抵抗極小の現象である．通常の残留抵抗とは異なり，抵抗は低温で増加するという異常を示す（図6）．1964年に，近藤により磁性不純物による散乱に関する高温展開で抵抗極小はうまく説明されたが，低温で種々の物理量に発散が生じるという困難を伴った[10]．この理論の困難さ

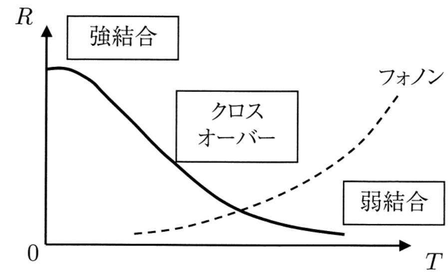


図6 近藤効果における抵抗 R の温度依存性．通常，抵抗は温度を下げるとフォノン散乱がおさまるので残留抵抗値に近づくが，近藤効果では低温で逆に抵抗は増加し，さらに低温では一定値に近づく．実線（破線）は磁性不純物（フォノン）からの寄与．

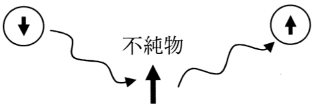


図 7　近藤効果における伝導電子と局在スピンとの散乱．スピン反転を伴う．

の起源が局在スピンに起因する多体効果であることが示され，それを契機に近藤効果が固体電子論のみならず，物理学全体に共通する多体問題の本質にふれるものであることが広く認識された．その後の多くの研究で低温における本質は明らかにされたが[13]，全温度領域での振舞いを解明したのは Wilson の繰り込み群による研究である[12]．

近藤効果では，伝導電子が不純物により $J\mathbf{S}_{\mathbf{imp}}\cdot\mathbf{S}_{\mathbf{c}}$ タイプの交換相互作用で散乱される．重要なことは，散乱の際に不純物スピン（$\mathbf{S}_{\mathbf{imp}}$）と伝導電子のスピン（$\mathbf{S}_{\mathbf{c}}$）が反転を起こすことである（図 7）．このような散乱を通して，伝導電子は不純物のスピンを遮蔽し始め（$J>0$，反強磁性的な結合の場合），絶対零度では局在スピンは完全に凍結し「強結合の固定点」にたどり着く．どのように小さい J の値（弱結合）から出発しても必ずこの繰り込みが生じてしまう．このように近藤効果で温度を下げて物理量を観測するということは，弱結合から強結合への繰り込み群のフローを直接追いかけることに対応している（図 6）[12]．

近藤効果の取扱いの困難さを繰り込み群の観点から眺めてみよう．温度を下げ低エネルギー部分に注目することは，伝導電子のバンド幅を有効的に減らしていったときの繰り込みの様子を調べることに対応する．そこで，バンド端を D から少し縮めて D' とし，結合定数 J の変化を見てみよう（図 8）．(1) 式におけるベータ関数を正確に見積もるのは難しいので，まずは $\Delta D=D-D'$ の高エネルギー部分の効果を J の 2 次摂動によって取り込むことにしよう（(1) 式との対応は $L=-\log D$）[11]．この場合のスケーリング方程式は以下のようになる．

$$\mathrm{d}J/\mathrm{d}D \sim -J^2/D. \qquad (2)$$

容易に分かるように，$J<0$（強磁性的）の初期値

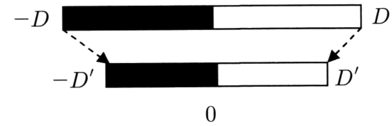


図 8　伝導電子のバンド幅の減少による繰り込み（電子はバンドの底 $-D$ から 0 のエネルギーまで詰まっている）．バンド幅の減少は温度の低下を表す．

から出発すると，バンド幅が小さくなるにつれて J はゼロに繰り込まれ，弱結合に近づく．強磁性相互作用なのでスピンの遮蔽は起こらないことに対応している．一方，$J>0$（反強磁性的）の場合には，J の値はどんどん大きくなり，強結合に近づいてゆく．これは温度の低下とともに遮蔽が起こり始め伝導電子が強くスピンと結合することを表している（結果としてスピン一重項を形成）．これらの結果は正しい傾向を再現している．

しかしながら，$J>0$ の場合必ずあるバンド幅 D_K（対応する温度 T_K）で繰り込まれた J の値が発散し，それ以下のバンド幅（温度）では理論が破綻することが (2) 式の積分から直ちにわかる．この発散の事情は，2 次摂動を改良し高次の項を取り入れても本質的に除去できない．このことは，高温の弱結合領域からの摂動論的なアプローチでは，絶対零度の強結合固定点に到達できないことを示している．もちろん，絶対零度からの摂動に基づけば，低温の強結合付近の性質を調べることができるが[13]，どちらのアプローチを用いても，クロスオーバー領域（中間領域）を含めた問題を記述することは難しい．

このような困難は，物理学の多くの問題に共通のものである．近藤効果が物性物理を超えて広く研究され，これが多体問題の本質をついたものとして重要視されるゆえんである．Wilson は，繰り込み群方程式の解法に独自のアイデアを出して，近藤効果のクロスオーバーの振舞いを明らかにした．Wilson の理論では，ベータ関数の取扱いに 2 つのアイデアが導入された[11,12]．一つは，高エネルギー部分の電子状態を粗く扱う一方で低エネルギー部分を細かく扱うという定式化である．これ

で，低温での繰り込みがかなり改良される．最も本質的なアイデアは，上記の繰り込み群方程式にある種のユニタリー変換を施し，最初の繰り込みステップで J の効果をほとんど取り込んでしまうというものである．残りの繰り込みステップで低エネルギー効果を高精度で取り入れる仕掛けになっているので，繰り込み群のフローを正確に描きつつ強結合固定点まで辿りつける．このように繰り込み群を用いることで，多体問題の典型例である近藤効果が全温度領域で解かれた．

私が Wilson の理論に出会ったのは，1980 年大学院の修士 1 年のときである．私自身のテーマが近藤効果に関する厳密解（ベーテ仮説法）であったこともあり，博士課程を終えるころには近藤効果の重要性，難しさ，Wilson の理論の華麗さを肌で感じていた．折しも，Wilson の繰り込み群はノーベル賞へとつながり，私の感動に拍車をかけるものとなった．このように近藤効果という多体問題を臨界現象という観点で見直すことで本質的な理論の進展がもたらされたわけである．実は，その十数年後の 1990 年代になって，この問題にさらなる発展があった．前節で述べた共形場理論によるアプローチである[14]．Wilson の理論でも未解決の問題がいくつかあったが，これも解決されたのである．共形場理論という美しい数学に基づき，近藤効果のような現実に即した物理を理解すること，これは理論物理学における一つの理想的な研究のかたちであるように思われる．

6. 多様性と普遍性

このように，従来のものと少し異なった見方をすることで，複雑に見えていた問題がスーッと透きとおり，その本質が浮かび上がってくることがある．ちょっとした発想の転換が，新たな展望をもたらす．ここでは，そのような例として臨界現象・繰り込み群にまつわる話題を紹介した．臨界現象は物理学の至る所に現れるので，分野の垣根を越えた発想を培うのにもってこいのものである．

物性物理学（統計物理学を含む）は，長い研究の上に築き上げられた筋金入りの学問である．この面白みを学生の人たちに伝えるのはなかなか難しい．素粒子の究極の理論といったようなテーマに比べ，少しごちゃごちゃした各論のような印象を持ってしまうようである．物性物理に現れる著しい現象は，結晶構造のような物質の個性が生み出す「多様性」に加えて，それらの背後に横たわる「普遍性」がその礎となっている．広い視野から現象を眺めることで物性物理の多様性に潜む普遍性が自然に見えてくれば，しめたものである．基礎物理としての魅力が肌で感じられるものと思う．

参考文献

1) 数理科学特集号 No.406「くりこみ理論の地平」(1997 年，サイエンス社)．
2) 江沢洋，渡辺敬二，鈴木増雄，田崎晴明『くりこみ群の方法』(岩波講座，現代の物理学 13，1994 年)．
3) F.J. Wegner, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* **6** (Academic Press, 1976) page 8.
4) N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Addison–Wesley, 1992).
5) J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* (Cambridge Univ. Press, 1996).
6) ミチオ・カク，『超弦理論』(太田信義訳，シュプリンガー・ジャパン，1990)．
7) ジョセフ・ポルチンスキー，『ストリング理論』第 1, 2 巻 (伊藤克司ら訳，シュプリンガー・ジャパン，2005)．
8) 川上則雄，梁成吉，『共形場理論と 1 次元量子系』(岩波書店，1997)；川上則雄，『1 次元電子系の数理』(岩波書店，2002)．
9) 山田泰彦，『共形場理論入門』(培風館，2006 年)．
10) J. Kondo, *Prog. Theor. Phys.* **32**, 37 (1964).
11) 近藤淳，『金属電子論』(裳華房，1983 年)．
12) K.G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **47** 773 (1975).
13) 芳田奎，『磁性』(岩波書店，1991)．
14) I. Affleck and A.W.W. Ludwig, *Phys. Rev.* **B48**, 7297 (1993).

（かわかみ・のりお，京都大学大学院理学研究科）

熱力学の基礎概念

エントロピーをめぐって

佐々　真一

1. はじめに

「エントロピー」という言葉を初めて耳にしたのは大学に入学してすぐだった．おませな友人たちがこの言葉を使って不可逆性について論じているのを呆然と見ていた．力学の可逆性と自然現象の不可逆性の関係に興味はあったものの，すぐには手に負えない感じがした．

19 歳になって熱力学の勉強を始めた．たくさんの本を積み上げて格闘したが，分かった気にならなかった．微分形式やルジャンドル変換などの数学的技法は，時間をかけて勉強しているうちにそれなりにこなせるようになってきたが，皮膚に焼きつく感じが全くしなかった．統計力学を習得すれば熱力学が分かるようになると考え，熱力学をあきらめて統計力学を勉強した．

統計力学では，「ミクロレベルのハミルトニアンが与えられたときにマクロな熱力学的性質を求める」と問題が明快に与えられており，その枠内で理解を積み上げていくのは一本道に見えた．そして，統計力学に馴染んだ頃には，熱力学のことをすっかり忘れていた．熱力学を深く理解しなくても統計力学を理解できたし，それで十分に足りるように思えた．例えば,「エントロピーとは何か？」と聞かれれば，ボルツマンの公式で答えるのが簡単だ．

このような個人的経験を共有している人は少なからずいるようだ．大学で学ぶ物理学の他の基礎科目が圧倒的な迫力で記憶に残るのに対し，熱力学は分かったような分からないようなモヤモヤしたまま忘れ去られているのではないだろうか．この解説では，同じような感覚を持ったまま大学を卒業した人やこれから悩もうとする大学生を読者に想定し，モヤモヤを解消するきっかけを与えることを目指したい．

2. 統一理論としての熱力学

電磁気学が電気的現象と磁気的現象をまとめて記述するのと同じように，熱力学は熱的現象と力学的現象を統一的に記述する．熱と力の統一理論といえば現代的だろうか．そして統一理論の核心は，それまで独立に見えた現象の関係を描くことにある．例えば，電流を流せば磁場ができるからこそ，電気と磁気は独立ではなく，それゆえに電磁気学が必要になる．同様に，熱学と力学が相互乗り入れしている現象があるからこそ熱力学がある（図 1 参照）．

つまり,「熱力学とは，巨視的な物質の熱的・力

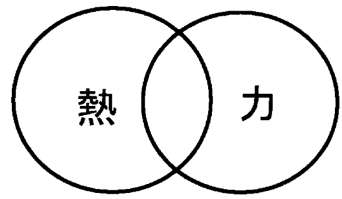


図 1　熱力学のイメージ図．

学的な性質を統一的に記述する体系である.」とまとめることができる．そして，この統一的記述によって，ある性質から全く別の性質を理解することができる．例えば，熱容量と圧縮率は独立ではなく，様々な条件下での熱容量の実験値から圧縮率の値が分かる．ここは，声をあげて驚くべき箇所だ．熱容量は温度を変化するのに必要な熱であり，純然たる熱測定で決めることができる．圧縮率とは物質に余分の力を加えたときの体積変化の割合であり，力学的に測定される．全く異なるタイプの測定によって得られるデータの定量的関係は非常に非自明だ．しかも，その関係は物質の特殊さの結果ではなく，どんな種類の物質に対しても成り立つ．このような関係は「普遍的関係」と呼ばれる．熱容量の温度依存性は物質の種類に依存するので，普遍的関係ではない．実験で測定される様々な関係の中から普遍的関係を抽出するのが熱力学の基本的な考え*1)だ．

では，どのように統一的記述を行うのだろうか．熱的量と力学的量の相互乗り入れ関係を網羅するのでは大変だ．巨視的物質の性質は様々だし，それらにまたがる関係を逐一並べていたのではきりがない．この統一的記述の仕方が格好いい．**たった一つの関数によってその物質の全ての熱力学的性質を表現することができる！** こんな素晴らしいことを成し遂げる関数が素朴な測定量であるはずがない．もしそうなら力学と熱学が別々に生まれたりはしないからだ．もっとも簡単な単成分の気体や液体の場合，例えば，内部エネルギー U，体積 V に対してエントロピー S を与える関数がその素晴らしい役割を果たす．これを

$$S(U,V) \tag{1}$$

と記す*2)．エントロピー S や内部エネルギー U

$$dU = TdS - pdV$$

図2　ギブスの基本関係式．T は絶対温度，p は圧力をあらわす．

がどのように定義され，どのような測定によってその値が決まるのか全く自明でないのだから，関数 (1) の意味はすぐには理解できない．むしろ，これを理解するのが熱力学を学ぶ目標になる．

内部エネルギーとエントロピーは，温度計，熱量計，力学的測定装置などの目盛からすぐに決まる量ではない．高度に抽象的な量といってもよい．しかし，素朴でないだけで，実際に測定によって値を決めることができることを忘れてはならない．実は，これらの抽象的な量を測定によって決めることができることを保証するのが，熱力学第1法則と第2法則だ．そして，苦労して測定することができる抽象的な量が (1) を介して絶大な威力を発揮するからこそ，これらは大事な量といえる．具体的には，図2で示されているギブスの基本関係式を介して，関数 (1) と素朴測定量は結ばれている．

内部エネルギーは深く考えなければそれほど難しい量でない．文字どおり物質の内部に蓄えられるエネルギーと解釈すれば，内部エネルギーの定義を与える熱力学第1法則は自然に理解できる．また，ミクロな視点から統計力学を構築する際には，この解釈にもとづいて内部エネルギーとミクロな量の関係を仮定することで，様々な実験結果と整合することが分かっている．それに対して，エントロピーは難解である．以下でゆっくり見ていこう．

3. 熱で定義するエントロピー

歴史的には，エントロピーを定義したのはクラウジウスだ．ドロドロした具体例の考察を何年にも渡って続け，ついに，熱と仕事を区別した上で熱に関係した状態変数を定義することに成功した．そこには豊かな物理的直観に支えられた感じはない．問題を素早く解く秀才的な鮮やかさもない．

*1)　従って，「熱力学とは理想気体の状態方程式とエネルギー保存則だ.」という大学受験に必要なおまじないは完全に筋違いな理解なので，即刻忘れたい．

*2)　関数形そのものは物質の種類に依存することに注意したい．物質の性質をまとめて書くことができる関数が存在することまでが熱力学の主張だ．物質を構成するミクロな粒子の相互作用に基づいてこの関数を計算する枠組みは，統計力学によって与えられる．

$$S(T,V) - S_* = \int \frac{d'Q}{T}$$

図 3 クラウジウスによるエントロピーの定義．右辺の積分は，状態空間において基準状態から状態 (T, V) をつなぐ経路に沿って行う．その積分値が積分経路の選択に依存しないことがこの式の核心だ．

むしろ，何かがあるはずだという強い信念（執念）の結実のように感じる．図 3 にクラウジウスによるエントロピーの定義を記した．この式の解説をするのでなく，そこに至る背景を紹介しよう．

まず，熱と仕事を区別する必要がある．熱力学第 1 法則によって熱と仕事はともにエネルギー移動の形態として把握される．その一方，熱と仕事には明確な違いがあるようだ．その端的な表現が，「第 2 種永久機関[*3)]が存在しない」という命題だ．現在までにこの命題の反例は見つかっていないので，これを認めることにより熱と仕事を区別できる．しかしながら，「○○が存在しない」という否定的な命題から何かを定義するのは想像しがたい．

数学としてのからくりは以下のようになっている．まず，「第 2 種永久機関が存在しない」という命題を熱や仕事についての不等式の形で表す．不等式のままでは何かの定義に使えそうもないのだが，その等号成立条件に着目する．第 2 種永久機関はできないけれど，熱から仕事にできる限り変換するぎりぎりの状態変化を考える．そこで得られるのは何かしらの等式だから，それによって状態変数を定義する可能性が生まれる．

物理的には，このぎりぎりの状態変化は，力学装置をゆっくり作用させたり熱源の温度をゆっくり変えることによって実現される．「ゆっくり」というのは曲者で，何に比べてゆっくりなのかを指定しないと意味がない．イメージとしては，平衡状態がずっと続いているかのようでありながら，気がついたら状態変化してしまっているくらいの「ゆっくりさ」だ．このような変化は準静的過程[*4)]と呼ばれる．平衡状態が続いているかのような過程なので，準静的過程は状態空間の経路として表現できる．

驚くことに，熱から仕事へのできる限りの変換という着想は，熱力学第 2 法則ができるよりずっと前，まだ第 1 法則すら確立していなかったときに，カルノーによって得られていた．カルノーは，温度が異なる 2 つの熱源を使ったサイクル過程で取り出せる仕事と高温熱浴から流れ出る熱の比の最大値が物質の種類に依存せず熱源の温度だけで決まることを見出した．その最大値を実現するサイクルがぎりぎりの状態変化に対応している．カルノー以降の発展を教科書的にあっさりまとめると，「カルノーによって見出された物質の種類に依存しない関係式にもとづいて，最大限普遍化した温度としての絶対温度がケルビンによって定式化され，新しい状態変数であるエントロピーが図 3 の表現としてクラウジウスによって得られた．」となる．

熱力学を勉強して，以上を論理的に納得できたとしても，そこからエントロピーの描像を想起するのは困難だ．そもそも，熱と仕事の操作的区別を感覚的に納得するのが簡単ではない．そこで，クラウジウスによるエントロピーの定義から離れて，エントロピーの本質に迫っていこう．

4. 不可逆性で特徴づけるエントロピー

もっとも明晰な S の特徴づけを与えたい．例えば，直観的に分かりにくい熱と仕事の区別を経由せずにエントロピーを構成する手順はないのだろうか．もちろん，どのような道を辿ろうとも，「第 2 種永久機関が存在しない」という命題と本質的に同じ前提が必要だ．実は，ありふれたことにヒントがある．手のひらを合わせて激しくこすると，手のひらが熱くなる．しかし，こすり方をどんなに工夫しても手のひらを冷たくすることはできな

*3) 単一の熱源から正の熱を受け取り，他には何の変化を生じることなく，そのまま仕事に変換するサイクル過程を実現する装置を第 2 種永久機関と呼ぶ．

*4) もちろん，イメージだけでは学問にならない．与えられた変化に対して準静的過程かどうかを実験で判断する操作的基準が必要だ．

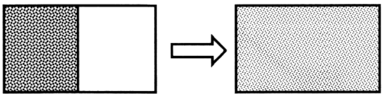


図 4　断熱自由膨張.

い．つまり，周囲と熱交換がない条件下で系に操作をするとき，好き勝手には状態変化を実現することができないようだ．この事実を踏まえて，「断熱過程として実現できない状態変化がある」という命題を前提にした形式化を考えることができる．これはプランクの学位論文で提案されたらしい．

この前提は不可逆過程の存在を意味する．不可逆過程とは，手のひらをこすり合わせて温度を上げる過程のように，その逆ができない過程のことをいう．もっとも典型的な過程は，図 4 で示されている断熱自由膨張だ．最初，箱の左半分の領域に気体が閉じ込められていて，右半分は真空になっているとしよう．真中には仕切り板がある．箱全体が断熱されていて，仕切り板を抜くと気体は自発的に（自由に）箱全体に広がる．この逆過程では，箱全体に広がった気体が自発的に収縮して左側の領域に閉じ込められることになるが，こんなことは決して起こらない．また，図 4 の右側の状態からピストンを使って仕切り板を真ん中まで押し込んだとしても，気体がされた仕事に対応して温度が上昇するので最初の状態には戻らない．一般にどのような手段を使っても図 4 の右側の状態から左側の状態に断熱過程で遷移できない．従って，断熱自由膨張は不可逆過程である．

話を少し抽象的に進めよう．平衡状態を A, B などのシンボルで書き，2 つの状態 A, B に対して，A から B へ断熱過程で実現できるとき $A \to B$ と表す．このとき，「$A \to B$, $B \to C$ ならば $A \to C$」が成り立つのは自明である．この命題は関係 $\to$ による平衡状態のランクづけを示唆している．実は，任意の状態 A, B に対して，

$$A \to B \quad \Leftrightarrow \quad S(A) \le S(B) \qquad (2)$$

となる関数 S が本質的に一意*5) に存在することが分かっている．記号から推測されるように，この S がエントロピーに他ならない．これは美しい命題であり，S の特徴づけとしてもっとも明快であろう．筆者はこの美しい命題を数理物理学者による論文[1)]から学んだ*6)．その論文では，$\to$ に関する公理にもとづいて，(2) を満たす S を構成している*7)．その抽象的エントロピーに魂を入れて熱力学を構築するには，熱力学系についての知見が必要である．上述の論文では，その部分についても公理を加えていくが，抽象的エントロピーの構成方法だけを物理的な熱力学構築に輸入することもできる．例えば，「断熱過程として実現できない状態変化がある」という命題を前提にして (2) を満たす S を構成するのが理論的にはもっともすっきりしている*8)．また，「第 2 種永久機関が存在しない」という命題を前提にして (2) を満たす S としてエントロピーを構成する路線は筆者の教科書[2)]で採用している．

ところで，断熱環境下の自発的な変化でエントロピーが増えることは「エントロピー増大の法則」と呼ばれている．自然現象には変化の向きがあることを物理の法則として明示的に主張しているのだ．もちろん，自然現象に変化の向きがあること自体は，周囲を見渡せば当たり前だ．私たちは年齢を重ねて老いていくが決して若返ることはない．しかし，物理学を学べば学ぶほど，この当たり前の事実から遠ざかっていくように感じる．力学，電磁気学，量子力学など物理学の基幹科目は美しく整備されているが，それらは身の回りの変化の向きについて何も教えてくれない．そういう中で，変化の向きに関する法則を形式化する熱力学は物理学の異端的存在であり，かつ，それゆえに独特

*5)　正確に述べると，「(2) を満たす示量変数 S が基準状態と目盛間隔の選択の任意性を除いて一意に決まる.」となる．

*6)　1997 年の夏にプレプリントが公開された．その約 2 カ月後，出張中に読もうと手許に引き寄せた瞬間に夢中になった．

*7)　公理論的熱力学とは，標準的には，カラテオドリに始まる形式化をさす．そこでは，状態空間における経路（準静的過程）に対する熱を微分形式で書くことから始める．断熱過程で実現できない状態変化があることより，微分形式の理論を使って状態変数と絶対温度を同時に定義する．本文中の公理論的熱力学とはほぼ無関係だと考えてよい．

*8)　筆者の知る限り，この方針によるエントロピー構成は公開されていない．楽しい練習問題なので，興味ある読者は考えられたい．

の価値があるといえよう．

5. ゴムで納得するエントロピー

物質の性質を統一的に記述するカギとしてエントロピーがあったことを2節で紹介した．そして，その本質が変化の向きの定量化にあることを前節で説明した．ところで，「物質の性質の統一的記述」と「変化の向き」はあまりにも違うように見える．エントロピーがこのように一見して異なる2つの側面を持つこともエントロピーの理解を難解にしている．この2つの側面の関わりを理解する最適の例題がゴムだ．

力学的対象としてのゴムは，ばねと全く同じだと考えてよい．自然な状態から引っ張ると元に戻ろうとする力（復元力）が働く．力は変位に比例し，比例係数はばね定数と呼ばれる．ゴムが普通のばねと違うのは，ばね定数の温度依存性だ．理想的なゴムでは，ばね定数が絶対温度に比例することが知られている．簡単のため熱容量を定数だとしよう．これらの条件から，ゴムを引っ張ったときの内部エネルギーを計算すると，引っ張る前の値から変化しないことが分かる．マクロなばねであるゴムがミクロなばねから成り立っていると想像すると，引っ張ることによって内部のミクロなばねにエネルギーが溜まるはずだから，この計算結果は大変不思議に思える．

実は，ゴムが元に戻ろうとする力の起源はエントロピーにある．その理由を説明しよう．まず，熱力学の計算によって，ゴムを引っ張るとエントロピーが小さくなることが分かる．次に，断熱環境下ではエントロピーが大きくなる方向に自発的に変化することを思いだそう．ゴムを引っ張って止めた後で断熱環境下に置いても同じ復元力が働くのだから，この復元力は，「エントロピーを増やす方向に変化したがる性質」から決まっていると考えられる．このように変化の向きを表す量がマクロな力学に関わるのだ．

ミクロな立場からこの性質を想像することができる．図5のように，ゴムを硬いセグメントが連結された鎖だと考えよう．2つのセグメントの接合点では各々のセグメントが自由に回転できると仮定すると，セグメントの向きはバラバラになっているだろう．ここで，この鎖の1つの端（図5の■）を固定した後，他方の端（図5の●）を掴んで右側に引っ張ってみる．このとき，エネルギーの変化はないが，バラバラの度合が減少している．そして，図5の●を掴んでいた手を離すと，「セグメントたちがバラバラになりたがる」結果として，鎖はひっぱる前の状態に戻る．これがゴムに働く復元力の起源だ．

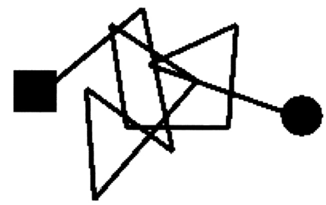


図5　ゴムの描像．

このバラバラの度合がエントロピーに他ならない．実際，統計力学による定式化では，マクロな状態が与えられたときのミクロな状態数の対数にボルツマン定数を乗じた量が統計力学エントロピーであり，熱力学極限で熱力学におけるエントロピーに対応することが分かっている．

6. 外に展開するエントロピー

熱に関係した状態量としてクラウジウスによって見出されたエントロピーは，統計力学の定式化を経て，熱力学の外へ発展していく．

まず，バラバラな度合を違った観点から定式化することにより情報理論[3)]がつくられた．例えば，010001000 ･･･ のような0と1からなるデータに対して，圧縮して保存するアルゴリズムを考えてみよう．手許のパソコンにも圧縮プログラムが装備されているかもしれない．ところで，どんなによいアルゴリズムを考えても，もとのデータ長に対する圧縮されたデータ長の割合（圧縮率）は一定以下にはできそうにない．極端な例として，0と1が確率1/2でランダムに生成されているデータ

なら圧縮する術がない．実は，圧縮率の限界値は01列の分布だけで決まっていて，統計力学エントロピーを自然に一般化した形で与えられる．これはシャノンエントロピーと呼ばれている．情報に関する制御限界の定量化として，熱力学から自然に発展したエントロピーが使われるのは19世紀には考えられなかっただろう．

宇宙論に目を向ければ，ブラックホールエントロピー[4]がある．事象の地平線の面積をエントロピーとみなすと，熱力学の類推が成り立つのだ．また，超弦理論によれば，対応するミクロな状態数を計算することができるらしい．この問題の現状を筆者は正確に理解していないが，平衡・非平衡の概念や操作限界の形式化も含めたより深いレベルの関係はあるのだろうか．

自然現象の変化の向きについて，もっとも身近にありながらもっとも不思議なのは生死の境界だろう．不老不死や蘇生は原理的にありえないのだろうか．ありえないならその理由を知りたいし，ありえるなら見たい．生死の境界に関する理論は，熱力学と直接の関係はないにせよ，抽象的なレベルでエントロピーと類似の量があるかもしれない．

最後に，平衡状態から少しだけはみだした非平衡条件下で熱力学の体系を拡張する枠組み「定常状態熱力学」[5]の展開について簡単に紹介したい．最近，ミクロな力学記述から出発して，クラウジウス関係式の自然な拡張を得ることができた[6]．それによって定義される状態変数はエントロピーに対応し，熱測定によって決めることができる．ただし，統計分布による表現は，シャノンエントロピーとは少し違った形になっている．さらに，環境に関する条件を指定することにより，ギブスの基本関係式も拡張された．これらは平衡熱力学の類推ではない．平衡極限では正しく熱力学に帰着されるので，それを含んだ体系になっている．100年の時を超えて，堅い堅い19世紀の古典的体系が，21世紀の今まさに広がろうとしている．アカデミックな興味では単純に大変わくわくするが，その真の意味はこれから明らかになってくるだろう．

7. メッセージ

熱力学の単位を落としたまま大学を卒業した筆者が，熱力学の基礎概念について解説記事を書くのは何とも不思議な気がする．定期試験のとき，ヒントで書いてくれてあったのだろうマクスウェル関係式を眺めながらほとんど手が動かなかったのは今でもよく覚えている．自分でいうと説得力はないが，勉強はしていた．言い訳をすれば，クラウジウスの原典にあたろうとしたり，カラテオドリにはまったりしていると，試験に間に合わなかったのだ．単位がないだけで困ったことはないが，学生時代にもう少し熱力学の全体像を理解したかった．この解説は当時の自分に向けても書かれている．もちろん，より大切な読者は，今まさに熱力学を学ぼうとする学生の皆さんだ．この解説で熱力学の印象が少しでも良くなったらそれ以上に嬉しいことはない．是非，熱力学を楽しく勉強して下さい．

参考文献

1) E.H. Lieb and J. Yngvason, The physics and mathematics of the second law of thermodynamics, *Phys. Rep.* **310**, 1–96 (1999); arXiv:cond-mat/9708200.
2) 佐々真一，『熱力学入門』，(共立出版，2000).
3) T.A. Cover and J.A. Thomas, *Elements of Information Theory* (Wiley, 1991).
4) R.M. Wald, The thermodynamics of black holes *Living Rev. Rel.* **4**, 6, (2001); arXiv:gr-qc/9912119.
5) S. Sasa and H. Tasaki, Steady state thermodynamics, *J. Stat. Phys.* **125**, 125–224, (2006); arXiv:cond-mat/0411052.
6) T.S. Komatsu, N. Nakagawa, S. Sasa and H. Tasaki, Steady state thermodynamics for heat conduction–microscopic derivation, arXiv:0711.0246.

（ささ・しんいち，東京大学大学院総合文化研究科）

統計力学の基礎問題

相転移・臨界現象・情報伝達

鈴木　増雄

1. 物理的思考法と数学的思考法

統計力学の基礎問題を議論することを通して，物理的思考法とは何かに迫るのが，この解説の狙いである．幸い，私の専門とする統計力学は物理学の他の分野に比べて大変ユニークな学問であり，この目的には極めて適した学問であると思われる．まず第１に，統計力学は，ある特定の対象に限定されることなく，普遍性を持った学問であり，もののことわりそのものを研究するものである．そのための一般的方法論に関する学問でもある．第2に，エントロピーなどの熱力学的概念の基礎づけを通して，価値観（例えば，力学的エネルギーと熱エネルギーの違いに見られる）に関係した学問である．

若きアインシュタインが統計力学の基礎問題にも真剣に取り組み，ボルツマンの金字塔であるエントロピーの式（ミクロな状態からマクロな性質を捉える式）を逆に解釈してマクロな現象からミクロの情報が得られることを指摘したり，ブラウン運動の理論を提唱したのも，相対性理論を考案したのも共通の思考法によるものと考えられる．どちらも逆転の発想法に基づくものと言えるであろう．

このように，物理学上の画期的発見の多くは，演繹を柱にした数学的思考法とは対照的に，帰納に基づく論理の飛躍によるものと言える．2005年10月岡山で開催された仁科記念講演会で，C.N. Yang氏も彼自身のノーベル賞に輝いた研究生活を振り返って，「演繹」も重要であるが，それにも増して「帰納」の思考法の重要性を強調されたことが印象に残っている．彼は，教育の現場でも，将来独創的な人材を育てるにはこの「帰納的思考法」を訓練することが極めて有効であると強く勧めている．例えば，「鶴亀算」は，代数的解法に比べると帰納的であって脳のトレーニングに良いとのことである．彼は，この考え方を学んだとき，大変興奮し，その後何年経ってもその興奮の経験が忘れられないと語っておられた．

フィールズ賞受賞者の広中平祐氏が2006年12月の林原一般講演会でも強調されている通り，数学上の大きな発見には，勿論，直観的な閃きが非常に重要である[1]．しかし，数学を学ぶ際には，演繹的方法が主になっているのが実情であろう．超一流の数学者は，帰納的思考法を独力で身につけているのであろうか．「佐藤の超関数」で有名な佐藤幹夫氏は重要な定理を直観的に発見（予想）し，後に他の人が証明に成功することが多かったと聞いている．因みに，筆者が東京大学の物理教室に移って間もなくの頃，2次元イジング模型の相関関数がパンルヴェの微分方程式を充たすというB.M. McCoyたちの分厚い前刷りが大学の私の居室で偶然佐藤氏の目に止まったときの彼の驚きは今でも忘れられない．彼は，その論文のタイトルを見て一瞬にして，その数学的重要性を看破したようであった．事実，その前刷りを京都に持ち帰

り，これをきっかけにして，三輪哲二氏，神保道夫氏と一緒に，タウ関数をはじめ，新しい数学の分野（モノドロミー保存変形など）を切り拓いたことはよく知られている．最近，McCoy 氏は，岡山の林原フォーラムの特別招待講演において，統計力学の分野の論文を純粋数学者が前刷りの時点で読み数学として大きく発展させるという，日本の物理と数学の密接な結びつき（ネットワーク）についての長い間の謎が日本に来てやっと解けたと話された．

さて，この解説では，統計力学の取り扱い方の筆者の新しいアイデアをまず説明したい．1965 年に筆者[2,3]が見つけた可換系での一般的な相関等式の方法（スピン $\frac{1}{2}$ のイジング模型で H.B. Callen が最初に導き，後に筆者が一般化したので，Callen–Suzuki 恒等式と呼ばれている）が，統計力学の新しい定式化として利用できることに最近気がついた．この方法は，（相転移の起きる）無限系だけでなく（相転移の起きない）有限系でも大変有効である．これを用いると相関関数の漸近形であるオルンシュタイン—ゼルニケ型の関数（無限系で成り立つ式）が容易に導かれる[4]．この議論は第 3 節で詳しく行う．

次に，この相関関数の恒等式の方法を利用しながら，相転移・臨界現象・相分離・秩序形成などのメカニズムの本質に迫りたい．最後に，統計力学の逆問題として情報理論を捉える考え方を説明したい．

2. 統計力学の新しい定式化 ——相関等式[2,3]

熱力学と統計力学を橋渡しする原理がボルツマンによって発見されたエントロピー S の公式 $S = k_{\mathrm{B}} \log W$ である．ここで，W は系のミクロな状態数である．さらに，ヘルムホルツの自由エネルギー F は系のエネルギー E とエントロピー S を用いて，$F = E - TS$ と表される．ただし，T は系の温度である．ところで，ボルツマン—ギブスの統計力学によると，エネルギー E もエントロピー S も，またその他すべての物理量は皆相関関数（高次も含まれる）を用いて表される[3]．したがって，相関関数は統計力学においてはもっとも重要な量である．前節でも述べたように，これらの相関関数を系の相互作用から求めるのが統計力学の大きな目標となる．その出発点になるのが系の確率分布を与える密度行列である．まず，平衡系ではランダウによって導入された密度行列 ρ は系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ を用いて

$$\rho = \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} / Z(\beta);$$
$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}}, \quad \beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{2.1}$$

と表される．非平衡系では，時間に依存した密度行列 $\rho(t)$ によって系の時間発展が記述され，$\rho(t)$ は次のフォン・ノイマン方程式に従う[3]：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = [\mathcal{H}(t), \rho(t)] \equiv \mathcal{H}(t)\rho(t) - \rho(t)\mathcal{H}(t) \tag{2.2}$$

ただし，$\hbar$ はプランク定数，$\mathcal{H}(t)$ は時間に依存した系のハミルトニアンである．外部摂動がハミルトニアンの形で書ける場合の線形応答理論は式 (2.2) の摂動論的取扱いによって導かれる[3]．

さて，(2.1) 式のような全系の密度行列（無限系では存在しない式）を顕わに用いずに，平衡系の統計力学を定式化することはできないであろうか．それに答えるのが相関等式の方法である．

よく知られている通り，統計力学では，個々の粒子のミクロな力学的運動を直接解かずに，系全体の平均的振舞いをエルゴード仮説をもとに確率的に扱う．それがギブスの統計集団（アンサンブル）の方法である．その平均を $\langle\cdots\rangle$ と表すことにする．したがって，観測される物理量は確率変数のアンサンブル平均で表される．系が熱平衡にあれば，それは熱平均（例えば，カノニカル平均，すなわち，(2.1) 式の ρ による平均）となり，非平衡系であれば，非平衡密度行列 $\rho(t)$ やツァリス統計などで表される．この解説では主として熱平衡系について議論する．

ところで，系の確率変数は多数あり，それらの積も確率変数である．これらの平均は一般に相関

関数と呼ばれ，無限系では無限に多くの相関関数が存在する．それらは互いに独立ではなく，局所的相互作用を通して一般に相互に関係し合っている．それらの関係を表すものが相関等式である．ここでは，簡単のために局所的相互作用が互いに可換である場合を考えることにする（例えばイジング模型がその良い例である）．今，互いに共通の変数を含まない $(n+1)$ 個の確率変数（例えばイジングスピン $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_n$）を考える．その平均 $\langle f_0 f_1 \cdots f_n \rangle$ は，f_0 と $f_1, \cdots, f_n$ の部分消去によって作られた変数 $\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_n$ との相関関数 $\langle f_0 \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_n \rangle$ で表される[2,3]．すなわち，

$$\langle f_0 f_1 \cdots f_n \rangle = \langle f_0 \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_n \rangle \tag{2.3}$$

という相関等式が一般的に成立する．ものの考え方として，一般化して抽象的に言えば，f_j から $\tilde{f}_j$ をどのように作るかが，統計集団そのものとその系の局所的相互作用とを規定することになる．この特集の趣旨から言えば，これで話は終りにしてもよいのであるが，それではあまりにもそっけないので，少し具体的に，しかも歴史的に説明する．(2.3) 式で $f_0 = 1$ とおけば，より対称的な相関等式

$$\langle f_1 \cdots f_n \rangle = \langle \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_n \rangle \tag{2.4}$$

となる[2,3]．この説明を読んで，それはくり込み群（実空間くり込み群）の理論ではないかと思われる方も多いだろう．全くその通りで，$\tilde{f}_j$ は f_j のくり込まれた変数と呼んでもよい．歴史的なことにこだわると，相関等式の一般論は，1965 年に提唱され[2)]，ウィルソンのくり込み群の理論の発表は 1971 年である[5)]．これを振り返って見直してみると，筆者にとっては感慨深いものがある．具体的に (2.1) 式のカノニカル分布で，f_j と $\tilde{f}_j$ の関係を調べてみる[2,3]．まず，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ を $\mathcal{H} = \mathcal{H}_g + \mathcal{H}'$ と分ける．ただし，$\mathcal{H}_g = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \cdots + \mathcal{H}_n$ であり，$\mathcal{H}_j$ は f_j に含まれる変数を含む部分ハミルトニアンである．（このように分割できる場合を考える．）これらの部分ハミルトニアンは互いに可換であると仮定している．このとき，

$$\tilde{f}_j = \langle f_j \rangle_{\mathcal{H}_j} = \mathrm{Tr}_{f_j} f_j \mathrm{e}^{-\beta \mathcal{H}_j} / \mathrm{Tr}_{f_j} \mathrm{e}^{-\beta \mathcal{H}_j};$$

$$\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B} T} \tag{2.5}$$

となる[2,3]．すなわち，$\tilde{f}_j$ は，部分ハミルトニアン $\mathcal{H}_j$ に関する平均をとり，f_j に含まれる変数に関してのみトレースをとって自由度を消去して求めた量である．それ以外の変数はまだ残っているので，$\tilde{f}_j$ はまだ確率変数である．

これでもまだ抽象的でわかりにくいかもしれないので，スピン $S = \frac{1}{2}$ のイジング模型

$$\mathcal{H} = -\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} S_i S_j - \mu_\mathrm{B} \sum_{j=1}^{N} H_j S_j;$$
$$S_j = \pm 1 \tag{2.6}$$

について説明する．ただし，$\{H_j\}$ は非一様な外部磁場である．また，相互作用 J_{ij} は局所的であるとする．そうでないと，$\{f_j\}$ の許される組み合わせが限定され，場合によってはそれらが存在しなくなる．容易に，例えば，スピン S_j について，

$$\tilde{S}_j \equiv \langle S_j \rangle_{\mathcal{H}_j} = \tanh(\beta E_j);$$
$$E_j = \sum_k J_{jk} S_k + \mu_\mathrm{B} H_j \tag{2.7}$$

となる．ここで，E_j はサイト j に働く有効ゼーマン（相互作用）エネルギーである（これは無限系でも有限である）．したがって，相関等式

$$\langle S_i S_j \rangle = \langle S_i \tanh(\beta E_j) \rangle \tag{2.8}$$

が導かれる（これは無限系でも成り立つ）．ただし，$i \neq j$ である．同様にして，$f_0 = 1$ とおくと，

$$\langle S_j \rangle = \langle \tanh(\beta E_j) \rangle \tag{2.9}$$

も成り立つ．(2.8) 式や (2.9) 式の右辺は，一般に多体のスピン相関関数で表され，それらについて，再び同様の相関等式を作ることができる．こうして，無限の漸化式が導かれ，それらが解析的に解ける場合には厳密解が求まる．1 次元系はその例である[3)]．ここで大事なことは，ひとたび相関等式を基本公式と認めた後は，(2.1) 式のような全体系の ρ や $\mathcal{H}$ はもはや顕わに使わないということである．ここが無限系で役立つ新しい視点である．

これらの相関等式には非常に多くの応用がある．

例えば，計算機実験（シミュレーション）を行ったとき，それがどのような精度になっているかの検算にも使われている．すなわち，相関等式の成り立ち具合を見ればよい．解析的な計算の手間を省くのにも利用されている．また，臨界指数を求めるのにも使える．例えば，局所的な3体スピン相関 $\langle S_1S_2S_3\rangle$ は自発磁化 $\langle S_1\rangle$ の臨界指数 β と一致することが相関等式から直ちに結論される[2]．

原理的には，平衡系の物理量はすべて相関等式を用いて求められる．特に幾何学的対称性の高い小さい系では効率的に計算できる．

3. 平均場理論——相関等式の応用と，状態方程式，相関関数および磁壁曲線（または相分離曲線）の導出

3.1 ワイスの状態方程式

平均場理論の状態方程式（ワイスの状態方程式）は，(2.9) 式の平均 $\langle\cdots\rangle$ を tanh の中に入れる近似（ゆらぎを無視する近似）をすると，容易に導かれる．一様な磁場 H の場合には，(2.9) 式より

$$s = \tanh(z\beta Js + \beta\mu_{\mathrm{B}}H) \tag{3.1}$$

という，秩序パラメータ $s = \langle S_j\rangle$ に関する閉じた非線形の，よく知られた状態方程式が求められる．ただし，z は最隣接格子点の数である．秩序パラメータ s も磁場 H も小さいときには，$\tanh x \simeq x$ の線形近似をして

$$s = \frac{\beta\mu_{\mathrm{B}}}{1-z\beta J}H;\ m = \mu_{\mathrm{B}}s \equiv \chi_0(T)H \tag{3.2}$$

となる．こうして，磁化率 $\chi_0(T)$ は次のキュリー・ワイス則

$$\chi_0(T) = \frac{\mu_{\mathrm{B}}^2}{k_{\mathrm{B}}}\frac{1}{T-T_{\mathrm{c}}};\ T_{\mathrm{c}} = zJ/k_{\mathrm{B}} \tag{3.3}$$

にしたがって相転移点 T_{c} で発散し，それ以下では対称性が破れ自発磁化が現れる[3,4]．

3.2 オルンシュタイン—ゼルニケの相関関数

次に，相関等式 (2.8) よりオルンシュタイン—ゼルニケの相関関数（無限系で成り立つ式）

$$C(R) = C_0\frac{\mathrm{e}^{-\kappa R}}{R} \tag{3.4}$$

を導いてみよう．(2.8) 式で磁場 H が零の場合に，

$$\langle S_iS_j\rangle = \left\langle \tanh\left(\beta\sum_k J_{jk}S_iS_k\right)\right\rangle \simeq \beta\sum_k J_{jk}\langle S_iS_k\rangle \tag{3.5}$$

と相転移点以上で近似し，無限系で $R \equiv |i-j|$ が大きいとして，(3.5) 式を格子間隔 a の2乗までテーラー展開すると，ラプラシアン Δ を用いて，

$$(\Delta-\kappa^2)C(R) = 0;\ C(R) \equiv \langle S_iS_j\rangle \tag{3.6}$$

となる．ただし，$\{J_{ij}\}$ は最隣接相互作用（大きさ J）である．また，$\kappa^2 = (1-z\beta J)/(\beta Ja^2)$ である．2階線形微分方程式 (3.6) の等方的な解として，(3.4) 式が得られる．相転移点 T_{c} では，相関距離 ξ の逆数 κ は零となり，$C(R) \sim 1/R$ となり，無限系ではスケールフリーとなる．これは相転移の一般的特徴を表している．磁化率のような応答関数の異常性は，すべて相関関数 (3.4) またはそれを一般化したもの $C(R) \sim \mathrm{e}^{-\kappa R}/R^{d-2+\eta}$ から導かれる．ただし，d は系の次元，η は平均場理論からのずれを表すフィッシャーの指数である．

3.3 非一様な系の秩序パラメータ——磁壁曲線・相分離曲線

さらに，(2.9) 式を非一様な場合に応用すると，スピン磁壁の構造や相分離の議論ができる．すなわち，$H=0$ とおいて，平均を tanh の中に入れるという近似をすると，$\langle S_j\rangle$ に関する方程式 $\langle S_j\rangle = \tanh(\beta\sum_k J_{jk}\langle S_k\rangle)$ が得られる．再び，J_{jk} を最隣接相互作用とし，その大きさを J として a の2乗までテーラー展開し，今度は，相転移点 T_{c} 以下で考えているので，$\langle S_R\rangle \equiv m(R)$ の3次までとると，次の2階非線形微分方程式

$$\frac{d^2}{dR^2}m(R) = -2\alpha^2\left(m(R) - b^2m^3(R)\right) \tag{3.7}$$

が得られる．ただし $\alpha^2 = (z\beta J-1)/(2\beta Ja^2)$ および $b^2 = (\beta J)^2/(6a^2\alpha^2)$ である．(3.7) 式の解は，よく知られているように，境界条件 $m(-\infty) = -1/b, m(\infty) = 1/b$ の下で，

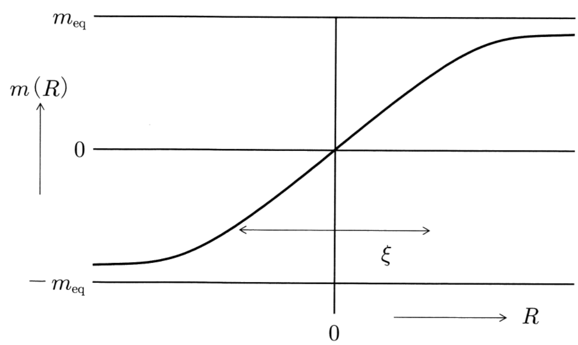


図 1 磁壁や相分離を表す曲線.

$$m(R)=\frac{1}{b}\tanh(\alpha R)\equiv m_{\rm eq}(T)\tanh(\alpha R) \tag{3.8}$$

と与えられる．この解は図 1 のように，磁壁や相分離の様子を表す典型的な曲線を与える．

この曲線は，直観的には，次のように解釈できる．すなわち，(2.9) 式で相互作用 J_{jk} が零で，磁場が非一様な値 H_j を持つ場合には，$\langle S_j\rangle = \tanh(\beta\mu_{\rm B}H_j)$ となるので，(3.8) 式で与えられる磁化 $m(R)$ は，場所 R に比例する平均場中の磁化とみなすことができる．実際，境界条件は，$H_{境界} = \pm\infty$ の値によって与えられる．

4. スピングラスの平均場理論 ──非線形磁化率の異常性

銅のような金属にマンガンのような磁性原子が混ざった合金では，ある温度 $T_{\rm sg}$ 以下でランダムな方向にスピンのそろった新しい相が現れる．これをスピングラスという．これは，RKKY という，符号まで振動する相互作用によってひき起こされる相転移である[3,6]．磁性原子の位置がランダムであるため，相互作用が符号までランダムな値を持つことになる．このような系を扱うには，(2.9) 式を平均場近似して得られる非一様な状態方程式

$$s_j=\tanh\left(\beta\sum_k J_{jk}s_k+h_j\right);\quad h_j=\beta\mu_{\rm B}H_j \tag{4.1}$$

を利用するとよい．しかも，これをさらに，ランダムな相互作用 $\{J_{jk}\}$ に関して平均をとる必要がある．この平均を $\langle\cdots\rangle_J$ と書くことにする．スピングラス相はランダムな方向への秩序化によって特徴づけられるから，各サイトごとに容易軸の方向が異なり，s_j の方向で表される．したがって，スピングラスの秩序パラメータ q は $\langle s_j^2\rangle_J$ で与えられることになる[3,6]．スピングラス相では，単純に s_j のランダム平均をとると，外部磁場が零の場合は零となる．すなわち，$\langle s_j\rangle_J=0$ である．

低温になると，(4.1) 式にオンサーガーのはねかえりの力が加わり，次のいわゆる TAP 方程式[6]

$$s_j=\tanh\beta\left\{\sum_k(J_{jk}s_k+\mu_{\rm B}H_j) -\beta\sum_k J_{jk}^2(1-s_k^2)s_j\right\} \tag{4.2}$$

を用いる必要がある．しかし，相転移点近傍の温度では，この補正項はもとの項に比べて $1/\sqrt{z}$ のオーダーで小さくなる．ただし，相互作用 $\{J_{jk}\}$ は最近接のみとし，その最近接格子点の数を z とする．ここでは，平均場近似で相転移点近傍の様子を議論したいので，(4.1) 式を用いることにする．その平方のランダム平均をとり，相転移点 $T_{\rm sg}$ より上側で，q と H が小さいとして最低次での状態方程式を求めると容易に

$$q=\chi_{\rm sg}H^2;$$
$$\chi_{\rm sg}=\frac{(\beta\mu_{\rm B})^2}{1-\beta^2\sum_k\langle J_{jk}^2\rangle_J}\sim\frac{1}{(T-T_{\rm sg})^{\gamma_{\rm s}}} \tag{4.3}$$

となる．ただし，$\gamma_{\rm s}=1$ である．特に，J_{jk} が $\pm J$ の値をランダムにとるモデルでは，(4.3) 式の分母は $1-z\beta^2J^2$ となり，この値が零になるところが $T_{\rm sg}$ を与える．したがって，$T_{\rm sg}=\sqrt{z}J/k_{\rm B}$ となる．これは，よく知られているように，平均場近似が妥当である条件 $z\gg1$ の下では，ワイス近似のキュリー点 $T_{\rm c}=zJ/k_{\rm B}$ より非常に小さい．すなわち，スピングラス相は強磁性より低温で現れる．(4.3) 式より，スピングラスの秩序パラメータ q に共役な力は H^2 であることがわかる．また，(4.1) 式をランダム平均して，磁化 $m=\mu_{\rm B}\langle s_j\rangle_J$ を求め，H の 3 次まで $m=\chi_0H+\chi_2H^3+\cdots$

のように展開すると，$\chi_0 = \mu_B^2/k_B T$ および $\chi_2 \propto -\chi_{sg} \sim -(T-T_{sg})^{-\gamma_s}$ であることがわかる．すなわち，スピングラス相転移点 T_{sg} で非線形磁化率 χ_2 が負に発散する[3,7]．これがスピングラス相転移の大きな特徴の一つである．これは，一般に現象論的にも導かれている[7]．

同様にして，丁度相転移点 T_{sg} では，$q \propto H$ となる[7]．δ_s を $q \propto (\text{共役な力} H^2)^{1/\delta_s}$ によって定義すると，$\delta_s = 2$ である[7]．さらに，レプリカ対称性の破れを無視した近似での低温側の q は $q \propto (T_{sg}-T)^{\beta_s}; \beta_s = 1$ と求まる[7]．こうして，平均場近似でのスピングラスの臨界指数のユニヴァサリティクラスは，$(\delta_s, \beta_s, \gamma_s) = (2,1,1)$ である[7]．これは，強磁性の場合の $(\delta, \beta, \gamma) = (3, \frac{1}{2}, 1)$ と対比して，その違いをみると，それは自由エネルギーの対称性の違いに基づくことがわかる[7]．したがって，秩序パラメータに関して反転対称性のない自由エネルギーに対応する相転移ではいつも平均場臨界指数は $(2,1,1)$ となる．

いずれにしても，このように相関等式を出発点にして，様々な物理現象が議論できる．

5. クラスター平均場近似 ——コヒーレント異常法（CAM）

前節では，ゆらぎの効果を無視して相転移のメカニズムと対称性の破れを議論した．ここでは，ゆらぎを系統的にとり込むことによって真の臨界現象に迫りたい．一番確実な方法はモデルを厳密に解くことであるが，これは極めて限られた系にしか適用できない．長く主流となっていた方法は，高温展開のような摂動展開を行い，それをパデ近似のような方法で解析し，応答関数の異常性を特徴づける臨界指数を近似的に求めることであった．1971 年にウィルソンによって，くり込み群の方法が提唱され，臨界現象の研究は一変した．この方法については，他の解説[8]に譲りたい．ここでは，前節の平均場近似に，ゆらぎの効果を系統的にとり込み，それらの近似理論を言わば“解析接続”して真の臨界現象に迫る一般的な方法である「コヒーレント異常法」[3,9]の要点を簡潔に説明したい．

ワイスの平均場理論では，無限の変数（自由度）を 1 個で置き換えて近似するので，ゆらぎの効果は全く取り込まれていない．ゆらぎを取り入れるためには，平均（の状態）からはずれた状態も計算にとり込まなければならない．そのためには，扱う変数（自由度）の数を増やさなければならない．1 個ではなく，クラスターを用いた近似をし，そのクラスターのサイズを少しずつ大きくしていけば，それだけ大きなゆらぎがとり込まれることになる．従来，日本でも小口近似，菊池近似，守田近似など多くの近似法が開発されてきた．定量的に問題となる相転移温度 T_c は少しずつ低くなり改良されるが，定性的な振舞いを特徴づける臨界指数はすべて古典的なワイスの平均場近似の値，$\alpha = 0, \beta = 1/2, \gamma = 1, \delta = 3, \eta = 0$ などのままであり，どのように大きなクラスターを用いても全く改良されない．数学的に言えば，それは，無限に対して有限はいくら大きくてもその比は“零に等しい”からである．ウィルソンは，彼のノーベル賞受賞講演の中で，従来の様々に改良された平均場近似が現代的な臨界現象の研究という点では破綻したから，全く別の見方，すなわち，場の理論の発散の困難を克服するために朝永やシュウィンガーによって開発されたくり込み群の理論をこの分野に導入したと述べている．（臨界現象の研究では発散を積極的に捉えその強さを具体的に評価するのにくり込み群の方法が特効薬となるという着想は見事なものである．）

ところで，従来の平均場近似という考え方は，現代的な臨界現象の研究に本当に全く役に立たないのであろうか．実は，今から約 40 年以上も前（1960 年代の中頃）に筆者の博士論文の中で，ワイスの平均場近似を拡張したベーテのクラスター近似を詳しく調べ，ワイス近似と比較して，臨界的な振舞いの真の様子に迫れないかと考えたことがある．上の 2 つの近似で求めた磁化率は，高温側では一致しており，クラスターのサイズを大きくしていくと，その適用範囲（真の磁化率に近い温度領域）が低温側に少しずつ広がっていくこと

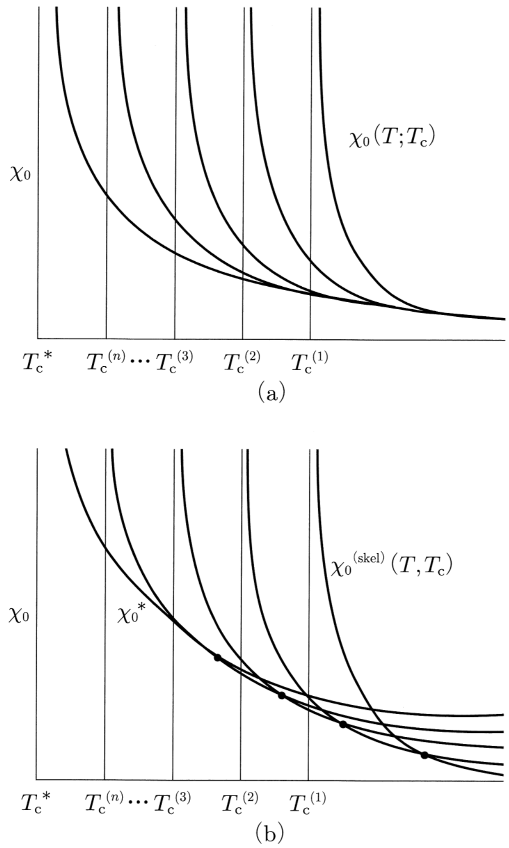


図 2　様々な近似に対する磁化率 χ_0 の温度変化[10]．(a) 近似的磁化率そのままの振舞い．高温領域で少しずつ真の磁化率に近づく．(b) 近似的相転移点 $T_c^{(n)}$ でスケルトナイズして求めた曲線群の包絡線 χ_0^* が真の異常性を与える[10]．

がわかった．勿論，クラスターのサイズを無限大にすれば，もとの系を厳密に解くことに当るので，近似的に求めた磁化率が真の磁化率に近づくのは当然である．しかし，全体的に一致する高温側の領域の変化は（図 2 (a) のように）極めて緩慢で，その振舞いから真の臨界的挙動（臨界指数など）を評価するのは困難であると思い，それ以上の深入りは諦めた．しかも，相転移に関するその当時の本には，平均場近似はいくらクラスターを大きくしてもそれらの近似で求めた相転移点 T_c は少しずつ下がり改良されるが，それらの近傍では，古典的な発散（キュリー・ワイス則という 1 位の発散）しか現れないから，役に立たないと強調されていた．（長い間，そのように信じられていた．）1980 年代の中頃になり，以前に研究したことのあるクラスター平均場近似を考え直してみることにした．それまでナンセンスと思っていた見方を敢えて試みた．すなわち，それぞれのクラスター平均場近似で求めた応答関数（磁性体では磁化率）$\chi_0(T)$ の相転移点 T_c 近傍だけに着目することにして，敢えて古典的なキュリー・ワイス則（1 位の極）を顕わに求めてみることを考えた．これらを

$$\chi_0(T) \simeq \frac{1}{\varepsilon}\bar{\chi}(T_c); \quad \varepsilon = \frac{T-T_c}{T_c} \tag{5.1}$$

と表すことにする．このようにスケルトナイズすると，高温側の値はむしろ近似ごとに値がずれてくる．（図 2 (b) 参照．）新しいアイデアは，相転移点 T_c（すなわち関数 $\chi_0(T)$ の特異点である極）が真の値 T_c^* に近づくにつれて，平均場臨界係数 $\bar{\chi}(T_c)$（すなわち極における留数）が異常に大きくなるということ（これをコヒーレント異常という）に気づき，これを用いて真の臨界指数が精度よく評価できるということに気づいたことである[3,9,10]．そこで，

$$\bar{\chi}(T_c) \sim (T_c - T_c^*)^{-\psi} \tag{5.2}$$

とおいて，いくつかの系統的な近似列から T_c^* とコヒーレント異常指数 ψ を評価すれば，$\chi_0^*(T) \sim (T-T_c^*)^{-\gamma}$ で定義される真の臨界指数 γ は $\gamma = 1+\psi$ と求められることになる[3,9,10]．この ψ が古典的な値からのずれの大きさを表す指数となっている．この方法をコヒーレント異常法 (CAM) と呼ぶ．この理論は，図 2 (b) からもわかる通り，包絡線の理論にも対応している．すなわち，各近似理論に共通した部分を取り出す（いいとこ取りする）方法を与えている．上の (5.2) 式で，$T_c - T_c^*$ は近似の度合を表しており，この理論は近似の度合（または近似理論）に関して言わば解析接続したようなものである．実際，今まで長い歴史のある多くの近似理論がそれぞれの問題（現象またはモデル）ごとに統合され現代的な臨界現象の研究に役立つことになった[3,9,10]．上に説明した方法は，応答関数に限らず，自発磁化などの他の物理量の臨界指数を求めるのにも有効である[3,9,10]．さらに，

非平衡系にも拡張され，臨界緩和指数なども精度よく評価されている[3,9]．

6. 厳密解はどこまでわかったか ——3次元イジング模型の予想解

今から60年以上も前に，オンサーガーが2次元イジング模型（磁場無し）の厳密解を発見したときには，世界中の統計物理学者が驚いた．その後，多くの理論家が3次元解に挑戦してきた．昨年暮れに，その予想解なるものを発表した中国人がいる[11]．彼の論文は111頁にも及ぶ膨大なもので，彼の提唱する自由エネルギーは4重積分で表されており，それから求まる臨界指数も $\alpha = 0$（対数），$\beta = 3/8, \gamma = 5/4, \delta = 13/3, \eta = 1/8$ と，今まで近似的にいろいろ求められてきた値とかなり近く，一見もっともらしく見える．（因みに，1次元の解は0重積分（積分無し），2次元の解は2重積分で表されている．）しかし，正直言って，予想の根拠が今のところ筆者にはよく理解できない．既存の結果と有意に違っているところもあり，にわかには正しい解とは信じ難い．いずれにしても今後の検討が必要である．

7. 情報，相関および量子効果

第1節でも述べたように，情報理論では，統計力学の逆問題を扱う．すなわち，情報を表現する相関を与えて，そのシステムの構造（相互作用ハミルトニアン）を決める．そのハミルトニアンを伝送すれば送られたほうはそれを解析することにより，その相関（情報）を知ることができる[6]．系の分布関数は一般に相関関数を用いて表されるから，その関係から，統計分布則がわかれば系のハミルトニアンもわかることになる．イジング模型では，分布関数 $P(S_1, \cdots, S_N)$ は

$$P(S_1, \cdots, S_N) = \frac{1}{2^N}\sum_{n=0}^{N}\sum_{\{j_1,\cdots,j_n\}} S_{j_1}S_{j_2}\cdots S_{j_n}\langle S_{j_1}S_{j_2}\cdots S_{j_n}\rangle;$$

$$S_j = \pm 1 \tag{7.1}$$

と与えられる．これは両辺に任意のスピン変数をかけて，スピン変数についての和（トレース）をとってみれば容易にわかる．この事実を用いると，実際の取り扱いが極めて見通しよくなる．統計力学で，系の相互作用を与えるということは，分布関数 P を限定することになる．これは，(7.1) 式からもわかる通り，相関関数の相互の関係を規定することに対応する．これが相関等式の成り立つ物理的ゆえんである．

最後に相関等式の方法を量子系に拡張することを説明する．KMS条件[3]（C* 代数）を用いる方法もあるが，ここでは，指数積分解公式[3,12]を用いて量子系を古典系に変換し[3,12]（すなわちST変換し）第2節の相関等式の定式化を利用するのが便利であることを指摘するにとどめておきたい．

今までの議論を要約すると次のようになる．物理現象に本質的に効くところだけをとり出す近似を行うのが物理の思考法である．

参考文献

1) 鈴木増雄，『活力を与える「物理」』（オーム社，東京理科大学・ぼっちゃん選書，2007）．
2) M. Suzuki, *Phys. Lett.* **19** (1965) 267; *ibid, Int. J. Mod. Phys.* **16** (2002) 1749.
3) 鈴木増雄，『統計力学』（岩波書店，現代物理学叢書，2000）．
4) 鈴木増雄他訳，『統計物理学ハンドブック』（朝倉書店，2007）の訳者補章．
5) K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **B4** (1971) 3174, 3184.
6) 西森秀稔，『スピングラスと情報統計力学』（岩波書店，2000）．
7) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **58** (1977) 1151; D. Chowdhury,『Spin Glasses and Other Frustrated Systems』(World Scientific, 1986), p30, および p121.
8) 川上則雄，本特集；江沢洋，渡辺敬二，鈴木増雄，田崎晴明，『くり込み群の方法』（岩波書店，現代物理学叢書，2000）．
9) M. Suzuki *et al*,『Coherent Anomaly Method—Mean Field, Fluctuations and Systematics』(World Scientific, 1995).
10) M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** (1986) 4205.
11) Z.-D. Zhang, *Phil. Mag.* **87** (2007) 5309.
12) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 1454. および，高次分解公式に関しては M. Suzuki, *Phys. Lett.* **A146** (1990) 319 参照．

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

超伝導のメカニズムをもとめて

斯波　弘行

1. はじめに

超伝導は凝縮系物理の中で最も面白い問題である．金属の水銀の電気抵抗が絶対温度 4.2 K 以下でゼロになる超伝導現象が発見されたのは 1911 年である．それから既に 1 世紀経っているが，いまだに超伝導は謎を秘めている．超伝導になる物質の探求は 30 年ほど前から特に活発になり，新しい超伝導体が発見されるたびに，その超伝導のメカニズムが従来のものでよいかどうかが問われている．超伝導のメカニズムは，依然として，完全に分かったとは言えない物理の基礎的問題である[1]．

超伝導のメカニズムについては，1957 年に超伝導の基本的な理論であるバーディーン・クーパー・シュリーファー（BCS）の理論が提出され，その直後は超伝導の問題はそれで完全解決と思われた．しかし，数多くの超伝導物質が見出された結果，BCS 理論だけではすべての超伝導体を完全には説明できないことが明らかになり，現在は BCS 理論を一部として含むような統一的な超伝導理論の構築へ向けた途上にあると筆者は考えている．

筆者が超伝導のことを知ったのは学部学生のときで 1961 年のことである．それ以来 47 年間，超伝導の研究を近くで，あるいは，少し離れたところから見てきた．また，自分の研究テーマとして関わった時期もある．この小論では，筆者の個人的な観点から，超伝導のメカニズムをめぐって研究者の考えがどう変わってきたかを記したいと思う．この 50 年間に凝縮系物理の対象は単純な物質から複雑な物質へ向けて進んでいる．「複雑な物質の中にもシンプルで普遍的な物理法則が潜んでいるはず」というのが凝縮系物理学者の信念である．超伝導の例を通して，凝縮系物理の考え方，面白さ，変貌をお伝えできればよいと思っている．

2. BCS 理論——格子振動を媒介にした電子間の引力的相互作用による超伝導

超伝導は多くの理論物理学者を魅了してきた．あのハイゼンベルクも 1947 年頃超伝導を研究していた[2]．しかし，その頃はまだ解明の鍵となる実験事実が不足していた[3]．また，実験は 1 種類の原子からなる単純な金属について行われていた．1950 年に金属原子をその同位体で置換すると超伝導になる転移温度 T_c が変わることが発見された（同位体効果）．同位体で置き換えて変わるのは原子の質量であり，それによって影響を受けるのは原子の振動の振動数だけであるから，金属の格子振動が関与していることが分かった[4]．これを大きなヒントに，バーディーン，クーパー，シュリーファーの超伝導理論（BCS 理論）が作られた[5]．

BCS が明らかにしたことは，大きく分けて，2 点ある．第 1 は，超伝導を引き起こす相互作用である．金属の原子が動けば，電子が影響を受ける．図 1 に示すように，この格子振動と電子との相互作用から格子振動を媒介にした電子間の間接的相

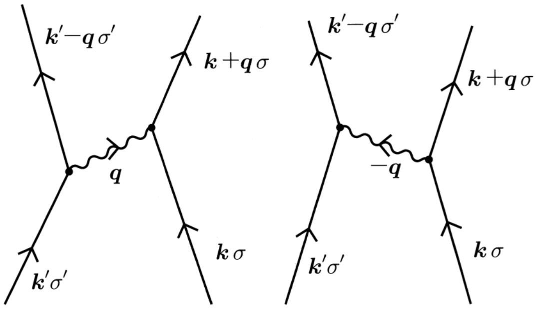


図 1　格子振動を媒介にする電子間の相互作用の様子．左の図は下から上に向かって時間が経過していると読めばよい．この図はエネルギー $\varepsilon_{\boldsymbol{k}'}$ の電子（スピンは σ' である）が格子振動（振動数は $\omega_{\boldsymbol{q}}$ である）を引き起こし，そのエネルギーが $\varepsilon_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}$ になり，その格子振動をスピン σ の別の電子（エネルギーを $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ とする）が受け取って $\varepsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}$ になることを示す．格子振動との相互作用は $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ の電子のほうが先に起こる右のプロセスもあるので，(1) 式では 2 つの項の和になっている．こうして，原子の振動を媒介にして 2 つの電子の間に間接的相互作用が生ずることになる．このような相互作用の有名な例は，核子の間に中間子を媒介にして間接的な相互作用が生ずることを示した湯川秀樹の理論である．

互作用が生ずる．その相互作用の強さは

$$\frac{|M_{\boldsymbol{q}}|^2}{\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\varepsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}-\hbar\omega_{\boldsymbol{q}}}+\frac{|M_{\boldsymbol{q}}|^2}{\varepsilon_{\boldsymbol{k}'}-\varepsilon_{\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{q}}-\hbar\omega_{\boldsymbol{q}}} \quad (1)$$

で表せる．ここで，$\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の電子のエネルギー，$\omega_{\boldsymbol{q}}$ は金属の格子振動の振動数（$\boldsymbol{q}$ は波数ベクトル），$M_{\boldsymbol{q}}$ は電子と格子振動との結合の強さを表している．金属の電子は，エネルギーがフェルミ準位以下の状態は，パウリの原理によって，詰まっている．(1) 式の相互作用は電子のエネルギーや格子振動の振動数に依存して複雑である．しかし，(1) 式の相互作用はフェルミ準位近くの電子の遷移 $|\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\varepsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}|<\hbar\omega_{\boldsymbol{q}}$ に対して負（すなわち，引力）になることを示している．すなわち，$|\varepsilon_{\boldsymbol{k}}-\varepsilon_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}|$ が小さく，$\hbar\omega_{\boldsymbol{q}}$ に比べて無視できるような電子に限れば，(1) 式は

$$-2\frac{|M_{\boldsymbol{q}}|^2}{\hbar\omega_{\boldsymbol{q}}} \quad (2)$$

と簡単化できることが分かる．(2) 式のマイナスは引力を意味している．これが重要である．(2) 式は，空間的に緩やかに原子が変位する格子振動については $\omega_{\boldsymbol{q}}=c|\boldsymbol{q}|$（$c$ は音速）であり，$M_{\boldsymbol{q}}\propto|\boldsymbol{q}|^{1/2}$ が成り立つので，$|M_{\boldsymbol{q}}|^2/\hbar\omega_{\boldsymbol{q}}$ が $\boldsymbol{q}$ に依存しない定数になる．このとき (2) 式は，実空間で見ると，2 つの電子が $\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ のデルタ関数型の引力

$$-V_0\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2) \quad (3)$$

（$V_0=|M_{\boldsymbol{q}}|^2/\hbar\omega_{\boldsymbol{q}}$）で相互作用していることを意味する．（本質的なことではないが，(2) 式にある 2 は，電子の番号 1, 2 の付け方の任意性を考慮して，(3) 式では落としてある．）導出の過程から分かるように，この引力的相互作用はフェルミ準位 ε_{F} をはさむ $\hbar\omega_0$（ω_0 は $\omega_{\boldsymbol{k}}$ の最大値）でだけ働く．複雑な問題をこのように簡単化し，(3) 式の引力を超伝導の起源とするのが BCS 理論である．同位元素効果は $\omega_0\propto$(原子の質量)$^{-1/2}$ という依存性をもつことに注意すると説明できる．

電子はフェルミ粒子である．フェルミ粒子系の波動関数は粒子の番号の入れ替えに対して符号を変えるという性質を持つ．このために相互作用が (3) 式のように引力であっても，波動関数をうまく選ばないと，プラスの寄与とマイナスの寄与が混在し，引力の効果は打ち消されてしまう．BCS 理論の第 2 のポイントは，(3) 式の引力を最もうまく利用するには電子対（クーパー対と呼ばれる）を作るのがよいことを示したことである．波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の電子と $-\boldsymbol{k}$ の電子の電子対が作られた状態が BCS 理論の超伝導状態である．電子はスピンを持つので，(1) 式の引力を利用するには電子対の 2 つの電子のスピンの向きは互いに逆向き（スピン一重項）が望ましい[6]．

3. 超伝導物質の探索がもたらした意外な展開

BCS 理論提出の当時は超伝導体としては 1 種類の原子からなる単純な金属だけしか知られていなかった．しかし，その後複数の種類の原子からなる化合物（2 元化合物，3 元化合物，4 元化合物，…）を作ってそれが超伝導体になるかどうかを調べる

実験が粘り強く続けられた．物質が複雑になっても本質的に新しい物理は生まれないと考えがちだが，一見複雑な化合物の合成と測定という地道な努力の中から意外な物質が超伝導になることが分かり，超伝導への見方の変更が必要になったのである．

その一つはドイツのシュテグリッヒによる希土類元素セリウム Ce を含む 3 元化合物 $CeCu_2Si_2$ における超伝導の発見（1979 年）である．超伝導転移温度は 0.6 K と低い．しかし，この物質が注目されたのは，希土類元素の 4f 軌道の電子が超伝導状態になっているからであった．（この化合物では超伝導の主役は Ce であり，Cu と Si は脇役である．）4f 軌道はイオンの比較的内側にあるので，その軌道上の電子は別の希土類原子へ移動するのが難しいと考えられる．事実，$CeCu_2Si_2$ の 4f 電子の動き難さはその電子の質量に反映し，普通の電子の質量の約 1000 倍の重い質量に相当することが分かった．それでも超伝導になっているのは研究者にとって予想外のことであった．このような物質は今では「重い電子系物質」とか「重い電子系超伝導体」と呼ばれている．その後の研究によって，重い電子系超伝導体は $CeCu_2Si_2$ だけではなく，類似の超伝導体が次から次へと見出され，現在までにその数は 30 を超えている．したがって，一つの物質の特異な現象ではなく，普遍的な問題がここにあると考えねばならない．BCS のシナリオの修正あるいは変更が必要であると多くの凝縮系物理の研究者は考えるようになった．

もう一つの極めて大きなインパクトは 1986 年の銅酸化物超伝導体の発見によってもたらされた[8]．La_2CuO_4 という酸化物の一部の La を 2 価イオン Ba あるいは Sr で置き換えて得られる 4 元化合物が超伝導転移温度 T_c の高い超伝導体であることが示されたのである．間もなく $YBa_2Cu_3O_7$ がより高い $T_c = 92\,K$ をもつことが分かった．この $YBa_2Cu_3O_7$ は今では大学の学生実験の材料になっている‘ありふれた’超伝導体である．$La_{2-x}M_xCuO_4$ (A: Ba, Sr) と $YBa_2Cu_3O_7$ の構造の共通点は Cu と O からなる CuO_2 層があることである（図 2）．これらの酸化物以外にも同じ共通点を持つ銅酸化物超伝導体が発見されている．これら銅酸化物高温超伝導は次のような性格をもっている．

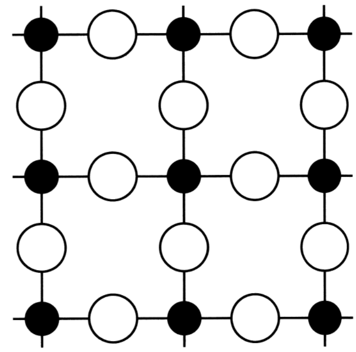


図 2　銅酸化物高温超伝導体に共通にある CuO_2 のレイヤー．小さい黒丸が Cu, 大きい白丸が O を表す．超伝導は主としてこの CuO_2 層の上で起こり，他の構成要素はこの層の電子数を制御する役割をしている．CuO_2 層では Cu の 3d 軌道と O の 2p 軌道が混じった状態が重要である．

(1)　超伝導転移温度が極めて高い．

(2)　$La_{2-x}M_xCuO_4$ の $x \sim 0$ では磁性が現れ，x が増加して適当な値になると高温超伝導が実現する．$YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ は $\delta = 0$ では超伝導体であるが，$\delta = 1$ では磁性体である．このように磁性と近接して超伝導相がある．このことは格子振動以外の何かがこの超伝導に潜んでいることを示唆する．

(3)　全体の構造は複雑に見えるが，超伝導は CuO_2 層の中で起こり，他の元素は CuO_2 層の中の平均電子数を変える役割をしている（図 2）．超伝導になる電子は Cu の 3d 軌道と O の p 軌道とが混じった軌道上の電子と推定される．2 価の Cu イオンは磁性を示すイオンであることを考えると磁性と関係があることは理解できる．

(4)　超伝導は電子対の形成による．この点は BCS 理論と同様である．

この他に，1979 年に有機超伝導体が合成されたことも超伝導のメカニズムを考える上で重要な進

展であるが，紙数が限られているのでここでは省略する．

4. 斥力的相互作用だけで超伝導は可能か？

前節で，超伝導のメカニズムはBCS理論だけでは不十分であることを示唆する実験事実があることを述べた．前節に登場した物質のCeあるいはCuイオンの上ではクーロンの斥力的相互作用が大きい．磁性が起こっているのはその証拠である．そこで，ひとまず個々の物質の超伝導は脇におき，「斥力的相互作用で超伝導が起こるのか？」という一般的な理論的問題を考えてみよう．

4.1 弱い斥力の効果を考える

固体の中の電子のエネルギーの分散関係は物質に依存する．簡単ため，電子のエネルギーが真空中を運動する自由粒子と同じ分散関係 $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2 \boldsymbol{k}^2/2m$ を持つ場合を最初に考えてみよう．短距離の斥力相互作用を U とすると，U の1次では(3)式の引力に敵対的である．U の2次の過程では，図3に示すような寄与がある．このような図に慣れていない読者もいると思うので説明すると，図3の左の図は，電子1が U を通して周りの電子を分極し，その分極が U を通して別の電子2に影響を与えることを表している．結果として電子1と電子2に U の2次の有効相互作用が生ずることになる．（右の図の説明は省略する．）2次の有効相互作用を詳しく調べると，それは距離とともに振動する．この振動は2つの電子の間にある電子系の分極関数を反映するためである．図4が示しているように，この振動のために，電子対が少し離れた距離にあるときに引力が働くから，それをうまく利用すれば電子対が作れる．それには有限の軌道角運動量 l をもつ電子対を作ればよい．というのは，軌道角運動量が有限のときには電子対を構成する2つの電子は，遠心力によって，l の値に応じて少し離れた距離を保つことになるからである．すなわち，斥力だけでも超伝導は可能であることが分かる．しかし，その引力は小さいから，期待される超伝導転移温度は低いはずである．ここに述べた機構はコーンとラッティンジャーが最初に発見したものである[9]．

4.2 固体特有の電子状態を考慮する

前節の議論で仮定した $\varepsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2 \boldsymbol{k}^2/2m$ は銅酸化物高温超伝導には当てはまらないし，また，高い T_c は期待できそうにない．もう少し固体特有の電子状態を考慮してみたらどうだろうか．図2に示した銅酸化物高温超伝導体の CuO_2 面を取り出すと，フェルミ準位以下の波数の状態は図5にスケッチした灰色の部分に相当し，パウリの原理によって，この状態は電子で占められている．自由電子の場合ならばこの灰色部分は丸になるはずだが，図5は四角に近い．丸の場合にはどの方向も同等だが，四角になると図の角の部分（A, B）とその間の平らな部分（C, D）とは電子状態の性格が違ってくる．話を簡単にするため，A, Bの部分が超伝導にとって重要だと仮定し，C, Dを無視

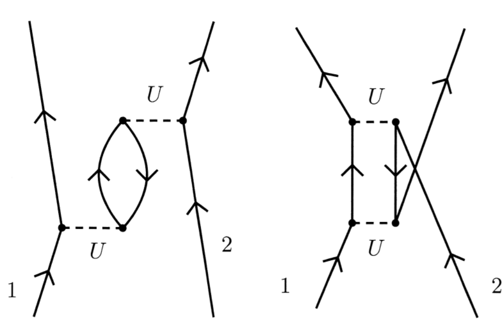


図3　斥力相互作用の2次で生ずる有効相互作用に寄与する2つのプロセス．点線は斥力相互作用 U を表す．

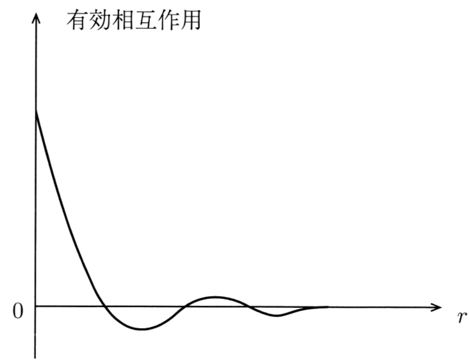


図4　図3の有効相互作用は距離 r と共に振動し，近距離では正（斥力）だが，少し離れた距離では負（引力）になる．

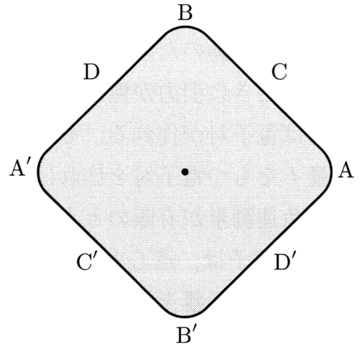


図5　図2のCuO_2の電子状態．灰色部分は電子によって占められている波数空間の領域の模式図である．角の部分をA, B（その向かいの部分をA′, B′），平らな部分をC, D（その向かいの部分をC′, D′）と呼ぶことにしよう．

してみよう．すると，「A, B, A′, B′の4点の電子のエネルギーを最低にするにはどうしたらよいか」という問題に帰着する．引力の場合にはA点，B点の波動関数を同位相（同符号）で足せばよい．これはBCS理論の場合に相当する．一方，AとB, BとA′, A′とB′, B′とAの間で斥力になっている場合にはA点，B点の波動関数を逆位相（逆符号）で足せばよい．このように紙面に垂直な軸の周りの90°の回転によって波動関数の符号が変わるような超伝導をd波超伝導と言う．一般にこのように電子対を作る電子の$\boldsymbol{k}$の方向に強く依存する超伝導を「異方的超伝導」と言う．（因みに，銅酸化物高温超伝導はd波超伝導であることが実験的に証明されている．）このとき斥力が強いほどエネルギーは低くなることは容易に分かるだろう．自由電子のようなケースでは斥力の場合は得はあったとしても小さいはずである．

上の議論でAとBを結ぶ斥力的相互作用が強くなると超伝導は起こり易いと期待されるが，それは反強磁性的傾向とうまくマッチするケースらしいと詳しい理論から推測されている[10,11]．

5. おわりに

この小論では凝縮系物理の最も面白いテーマである超伝導のメカニズムについてBCS理論からの進展をスケッチした．超伝導は相互作用する多電子系の難しい問題で，現在もまだ研究が続いている．理論的な可能性としては，ここに記したもの以外にいろいろある．また，電子対形成以外のシナリオの提案があるが，これまでの実験によれば，電子対の形成はすべての超伝導体で実現している．しかし，超伝導のメカニズムとしてはここに記したものがすべてかどうか，分かっていない．

この小論では話を思い切って簡略化した．研究者が考えていることの一部はお伝えできたかと思う．

注と参考文献

1) 超伝導全体についての優れた読み物としては，恒藤敏彦：『超伝導の探求』（岩波書店，1995年）がある．縦書きで読み易いが，レベルは高い．最近の専門書としてはA.J. Leggett: *Quantum Liquids: Bose Condensation and Cooper Pairing in Condensed-Matter Systems* (Oxford Univ. Press, 2006) がある．また，後で挙げるノーベル賞受賞者の講演から研究の現場を知ることができる．

2) W. Heisenberg: *Z. Naturforsch.* **2a**, 185 (1947); *ibid.* **3a**, 65 (1948).

3) 微視的な機構は分からない1950年の段階で，超伝導の現象論がギンツブルグとランダウによって提出され，そのGL理論は今も価値を失わない．ギンツブルグのノーベル賞講演でそのエッセンスを知ることができる．http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2003/ginzburg-lecture.html

4) その段階でのレビューとしては，J. Bardeen: *Encyclopedia of Physics* Vol.**15**, p.274 (1956).

5) ノーベル賞講演物理学第11巻（講談社，1980年）にBCS理論の提案者3人が分担して理論を解説している．

6) メカニズムが変わっても，BCS理論の中で残る最も重要な点は「電子対の形成」にある．電子対としてはスピンが互いに逆向きのスピン一重項だけでなく，スピンが平行にそろったスピン三重項の可能性もある．また，$\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{k}$の電子対の波動関数において$\boldsymbol{k}$の方向依存性が重要になるケース（それを異方的超伝導と言う）も可能である．

7) F. Steglich *et al.*: *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1892 (1979).

8) J.G. Bednorz and K.A. Mueller: *Z. Phys. B***64**, 189 (1986). ノーベル賞講演はhttp://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1987/bednorz-muller-lecture.htmlからpdfをダウンロードして読むことができる．

9) W. Kohn and J.M. Luttinger: *Phys. Rev. Lett.* **15**, 524 (1965).

10) P.W. Anderson *et al.*: *J. Phys. - Cond. Mat.* **16**, R755 (2004).

11) Y. Yanase *et al.*: *Phys. Rep.* **387**, 1 (2003).

（しば・ひろゆき，東京工業大学名誉教授）

特集／物理的思考法のすすめ

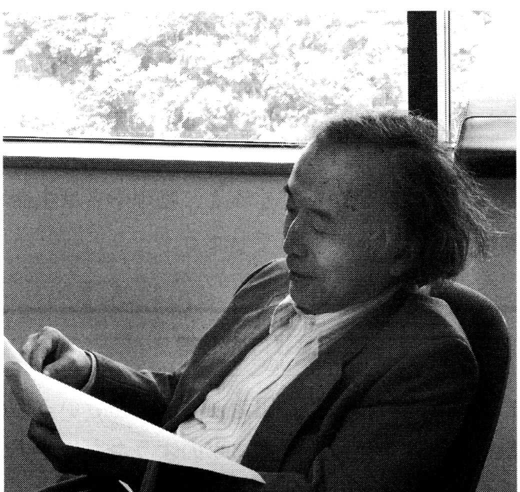
現代物理の思考法

藤川　和男（聞き手：編集部）

1. 現代物理の思考法—考え方の特徴

——現代物理は，量子力学を筆頭に20世紀以降の科学全体の発展に大きな影響を及ぼしましたが，ものの見方・考え方として挙げられる大きな特徴は何でしょうか．

そうですね，まず挙げられるのは，対称性とか変換群という見方とそれに付随して出てきた物理法則の幾何学化という側面が，20世紀の初め頃から見られた大きな特徴ではないでしょうか．歴史的には，相対論のミンコフスキー空間や量子力学で変換群という見方が出てきて，またそれらの発展として一般相対論およびゲージ理論になって幾何学的な側面がより強く現れ，パリティや時間反転，粒子・反粒子といった対称性の概念が出てきました．また，量子力学になって出てきた波動関数や波，それと干渉や位相（フェイズ）の概念などが，その後のゲージ場の考え方と密接に関係してきますね．対称性というものを物理理論の主導原理として意識し始めたというのが大きな特徴だと思います．



藤川和男氏.

——数学との関わりにおいてはどうでしょうか．

数学との関わりの中では，クラインなどの19世紀の数学者たちが考えた幾何学と変換群の考え方が，20世紀の物理に非常に強く影響を与えました．オイラー・ラグランジュ方程式やハミルトン・ヤコビの方程式といった解析力学の見方や考え方も，当時の数学者の影響が強いですし，ガウスやリーマンも当時は空間の平坦さや曲率などに興味をもっていたようですから，そういった意味で非常に多くの数学者が物理と関係していたことがわかります．

現代においても同じようなことが言えると思います．事実，超弦理論や共形場の理論，位相的場の理論などは，数学者と物理学者が一緒になって研究していることですし，ヤン・ミルズ場も数学では重要な未解決問題としても注目されている話で

す．最近のフィールズ賞の受賞内容を見ても，相当数のものが現代物理からヒントを得ているものが多いのではないでしょうか．量子群や可積分系のヤン・バクスター方程式など，物理の問題を数学的に深めたことで賞をとったものが多いと思います．

また，最近の経済物理とのつながりで言えば，確率微分方程式で有名な伊藤カリキュラスはまさに物理で言う経路積分の話です．それと，ウィーナーの確率過程の話なども経路積分と非常に密接に関係していますね．

数学者が厳密に定義できるようにすることを目的と考え，一方で物理学者が物理として役に立つようにすることが重要と考えるのでは違いがあり，同じようなことをやっていても大分違う内容になったりします．アノマリー（量子異常）という概念がその例です．1949年に物理学者の福田・宮本によって最初に発見され，朝永先生やシュウィンガーによっても考察されましたが，その当時はまだアノマリーとは分からなかったのです．1969年頃に，ベルとジャッキーフ，アドラー等によりある意味で再発見的に考えられました．それとちょうど同じ頃に数学者のアティヤとシンガーが指数定理というものを考えていて，それがアノマリーと同じことだったのです．どちらが先というわけでもないのですが．

それから，ガウス・ボンネの定理やリーマン・ロッホの定理といったものは，超弦理論のアノマリーとも関係してきますので，一口にアノマリーと言っても，いろいろな数学者の貢献が関わっているんです．

ただし，物理学者が使うアノマリーというのは，指数定理よりももっと広い意味で考えていますから細かいところでの違いはありますが，いずれにしても数学と物理は同じ問題の異なる側面に焦点を当てて，互いに影響を及ぼし合いながら発展してきたと言えます．

2. 未来への可能性

――今後，数学だけでなく他の分野でも物理の考え方が貢献したり，役に立つと思われる概念やキーワードはあるでしょうか．

そうですね，とくに生物学に理論物理学が関係していってくれるといいなと思いますが，まだその辺りは基礎的な定式化というものができていないのだと思います．生物に使えたとしても，現時点では数学の本当の深い所はほとんど現れないだろうと思いますね．20年ほど前にアティヤが言ったことですけれど，理論物理学においては数学の本質的な所は使われても，経済や他の分野にはその本当の深みのある所は使われていない，と．私もそんな感じがしますね．今の段階では，経済学や生物学で数学や理論物理の手法を使おうとしても，まだうまくかみ合っていないように感じます．それが将来うまくかみ合えば，例えばニュートンが力学を定式化したように，生物学の原理的な所に数学的な枠組みができあがれば，物理学でもかなり使える手法が出てくるのではないでしょうか．生命現象に対しては多くの方が興味を持たれていますから，何かそういったものができあがればかなり大きく発展する可能性はあると思います．

また，量子力学は生命現象にどこかで関係しているはずで，生物を原子・分子のレベルで見ていった暁に，何らかの形で量子力学的な効果が見つかったり，脳や細胞である種の干渉効果が見つかったりすれば，それはとても面白いでしょうね．そういったことが分かってくると，物理学者は生命現象にも大いに貢献するでしょう．

3. 習得の心得

――こうした物理的な思考法や考え方というものを身につける上で，何かコツのようなものやアドバイスがありましたらご教示願います．

学部で勉強する力学や量子力学，特殊相対性理

論などは，とても綺麗でシンプルでわかりやすい理論です．一方で熱力学や統計力学は多自由度の系を扱っていますから，一見したところの綺麗さというのはないですが，非常に多様な現象を扱っているので面白いのです．志してほしいのは，これらの両方の分野をバランスよく学んでいってほしいことですね．南部先生やヤン（楊）やアンダーソンといった偉い先生方は，ほとんどこの両方の分野に精通していましたから．

物理学は専門化して非常に分化してしまっていますが，理想を言えば，それらを統合して物理学全体を総合的に見ることができるようなスケールの大きい人が育ってくれるといいですよね．自分の専門分野の論文を読むだけでも大変ですから，物理学全体を読むなどというのはもっと難しいことですが．超弦理論などは，勉強するだけで白髪の目立つ年になっていたり，ということがありますからね．やはりディラックやアインシュタインのように，視野は広いがエッセンスは押さえて人生の若い頃に大きな発見や活躍ができるといいですよね．

日本では，教育システムの問題もありますが，分野をあまりにも限定しすぎるところがありますね．例えば素粒子や物性など，早い時期から専門的な勉強をして他に目をおおってしまうことで，逆にお互いをカバーするような大きな視点を養うことができなくなっているように思います．

そういった意味で，先ほどお話したようなバランスよく勉強していくことが大切になるのだと思います．

4. 数学との交流

――数学との今後の交流はどうでしょうか．

数学に限って話をしますと，数学ではまず定義から始まって厳密に考えていきますので，最初はよくわからなくても，勉強していくと後になって面白みがよくわかってくるのだと思います．物理学者には，その辺りが難しく感じるところがあるのではないでしょうか．私なども数学の本を読んでも，最初の数頁を読むと力尽きてしまって進めないんですね．

それと，物理学者の考えていることには，数学者から見てなぜあんなことをしているのかと思うようなこともあると思います．例えば，4次元の場の理論は数学的には厳密に定式化されていないのではないでしょうか．それでも物理学者はその手法を使って答えを導いて実験と比べたりしていますし，無限大の扱いなども物理学者は普通に扱いますが，数学者はそのような扱いが持つ意味はわからないと言います．

しかし先ほど話したように，数学者が考えたことで物理の問題に非常に大きな貢献を果たしたことがたくさんあるわけです．例えば，グラスマン数というのは，普通の数を超えた概念ですが，それがフェルミ粒子の経路積分とか超対称理論などでも使われていますから，数学者が一世紀前に考えたものが今になって物理で役に立つことも多いのです．

ですから，数学者も物理学者もそれぞれに面白いと思うことをそれぞれに進めていくことがまず大切なのではないでしょうか．例えば，ディラックのデルタ関数と超関数のように，自然な形で互いの考えをヒントにして発展することも多いわけですから，違いはあっても，近づけようと無理して共同研究したりする必要もないと思います．例えば本誌の特集のようなものを通して，軽い気持ちで交流していくのもいいのではないでしょうか．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2007年11月，日本大学駿河台キャンパス研究室にて）

（ふじかわ・かずお，日本大学理工学部）

特集／物理的思考法のすすめ

言語，経済，社会への物理学的アプローチ

青山　秀明

1. 序

ことは何年も前の，ある暑い夏の日に始まる．久しぶりに出会った英文学の助教授，ジョン・カンスタブルが「やあ! 今こんな計算をしているんだけど…」と，挨拶もそこそこに何やら面白そうな数字の話を持ち出してきた．私が早口の彼のイギリス英語に辟易しつつ彼の話に耳を傾けてみると，どうやら彼は英語の文章を数学的に調べているようだった．

2. 言語の物理

ジョンの話は，英語の文章において単語の音節の数(「単語長」)がなす配列の構造についてだった，この研究のために，彼は総単語数 200 万語にも上る英語文献を集めていた．つまり，ここに，約 200 万個の数字からなる数列があるわけだ．

私はかつて，スタンフォード線形加速器研究所(SLAC) の理論部で博士研究員をしていた．そこでは，チャームクォークの発見など，数々の輝かしい成果が挙がっていて，理論部には，同じ敷地内の実験解析施設に日参し，刻々と出てくる実験データに目を凝らしている研究者もいた．物理にとって，実験や観測のデータは命だ．その中には時として宝物が埋まっている．それは新しい素粒子かも知れないし，新しい対称性かも知れない．また，宇宙の彼方にあるブラックホールか新星かも知れない．それを見つけ出し，新たな理論を構築し，自然の奥底にある真実の姿に少しでも近づけないかと，物理屋は実験，観測，理論に日夜邁進する．

そんな世界で育ってきた私には，ジョンの単語長データは実に魅力のあるものだった．そこで，彼との共同研究に乗り出した私はやがて，データの特徴として以下の 2 つの性質が比較的良く成り立っているのに気付いた：

1. 単語長の相関がない．
2. 単語長の分布は幾何分布になる．

さて，それらを前に私は腕組みをして考え込んでしまった．これらは一体何を意味しているのだろうか？ もちろん，そこに何の意味もないのかもしれない．しかし，物理屋はそれでは納得がいかない．これらは何か，奥深くにある本質的なものを指し示しているはずだ，そう思い込んで『それ』を探すのが物理だ．

そして，すでに秋も深まったある日，私は『それ』に気付いて飛び上がり，興奮しながらジョンの研究室に走って行った．それはまさに単語長さの分布の核心，私と彼が後に『乱区切り則』[*1)] と名づけた，「単語長の分布は，どの音節同士の間にも，単語の区切りを一定確率で挿入したものに等しい」という極めて明快で単純な統計法則だった．

この法則は実に意外で驚きだ．コミュニケーションのために書かれる文書は，文法に縛られる一方で意味に溢れ，実に複雑な構造を持つ．その産物が本質的なランダムさを持っている．これはいかなる理由によるものだろうか？

実はほぼ同時期に同じことを調べていた言語学者と数学者からなるグループが海外にあった．彼らは単語長の分布について数十もの複雑な関数を用意して解析

*1)　Random segmentation rule．その詳細は参考文献 1) を見られたい．

し，「この文章については何々関数でその5つのパラメータが…が非常によい精度で合う」という類の論文を量産していた．これは全く無意味である．なぜなら，それは単なる現象の記述であって，何もそこから得るものはない．多少の誤差はあったとしても，分布を「幾何分布！」と割り切ることで初めて，「乱区切り則」への到達が可能になる．

そして，その乱区切り則からは，さまざまな発展がある．例えば，辞書の単語長分布は幾何法則とは全く異なる．そこから単語を選んで作られた文章が如何にして幾何法則に従うのだろうか．またこれには言語の発展と，コミュニケーションの効率性という重要な課題が潜んでいて，我々はそれについてのある理論も立てた．このように物事の奥に切り込むことで，新しい視野が開ける．

3. 経済と社会の物理

実は物理は，造幣局長官を務めたニュートンの頃から経済や社会と深い関わりを持ってきた．また，経済学も物理，特に力学に影響を受け，均衡理論などが発達した．しかし，蜜月は長く続かなかったようで，経済学は現代物理学の恩恵を受けずに来てしまった．

しかし現代に至って，経済や社会についてのデータが充実するにつれて，物理学者たちにとってそこに魅力ある世界が開けた．ここでは現在，私が研究を進めつつある「労働生産性」について述べておこう．

企業が生み出す付加価値を労働者数で微分して得られるのがこの「労働生産性」である．従来の経済学では，労働者の移動等によって，この値は企業によらず一定となった『均衡』が実現するとされている．さて，これは本当だろうか？ 物理を多少とも知っていれば，当然，そうは思わないであろう．気体の中で，分子は常に衝突しあって，ある平衡（経済学での「均衡」）状態を実現しているが，分子のエネルギーは同じではなく，ボルツマン分布をしている．だから，物理学者は，労働生産性もある分布をしているのが自然だと考える．一部の聡明な経済学者たち[3]はそれにとうに気付き，総需要（GDP）を温度として，生産性が気体分子のエネルギーに相当してボルツマン分布に従うという理論を提唱していた．

この興味ある理論に実証性を持ち込むことで，そこにもう一段，大きな発展があった．実際に日本の企業について調べてみると，労働生産性はボルツマン分布をせず，大きな値の領域でべき分布（Pareto 分布）となっていることが分かった．そして，労働者単位，企業単位，業種単位で，そのべき指数の絶対値（Pareto 指数）[*2] を測ると，これはこの順に下がっていく．つまり，Pareto 指数は集約度と共に下がる．

さて，これはどのように理解されるだろうか？ ここでまた物理の登場である．ボルツマン分布は平衡状態において成立する．そのためには，温度に相当する需要は一定でなければならない．しかし現実の経済社会では需要は変動している．新商品がヒットすれば需要は一夜にして沸騰するし，ある規格が取りやめのニュースが広まればすぐにその需要は底を打つ．そのように需要とは非常に早く変動できる．そこで，我々は超統計（superstatistics）理論を使って非平衡を扱うことにした．そうするとPareto 分布が説明できるし，集約度の異なる各 Pareto 指数と需要のゆらぎが関係つく．またそこから需要について重要な情報が得られ，我々はこれを利用した新たな景気指標を提唱するに至っている．

4. 終わりに

物理では現象の奥，そこにある何かの基本法則を常に探ろうとする．それには何もないかも知れないが，もし何かあれば，そこに新しい世界が開ける．言語や経済・社会の現象を見るにも，物理屋はこの姿勢は崩すことができない．そして，それは無駄ではなかった．さて，これからさらに何が出てくるであろうか．実に楽しみである．

参考文献

1) 青山秀明，雑誌『パリティ』2003年12月号「クローズアップ：“言語物理学” の夜明け」（丸善）
2) 青山秀明・家富洋・池田裕一・相馬亘・藤原義久著，『パレート・ファームズ—企業の興亡とつながりの科学—』（日本経済評論社，2007）
3) M. Aoki and H. Yoshikawa, *“Reconstructing Macroeconomics—A Perspective from Statistical Physics and Combinatorial Stochastic Processes”*, (Cambridge University Press, 2007)

（あおやま・ひであき，京都大学大学院理学研究科）

*2） 正確な定義は参考文献 2) をご覧いただきたい．

相対性理論

基礎から実験的検証まで

三尾典克著，B5 判，184 頁，本体 1838 円，サイエンス社



物理学や数学の教科書は，遠回りをするようでも結局の所，導出をきちんとやりながら全体系をゆるぎなく示してくれるものがよい．特に初学者が読む場合はそうである．本書は体系を重んじた見通しのよいテキストである．昔ランダウ・リフシッツの『場の古典論』の前半を読み，ごたごたした印象の電磁気学が，相対論の枠組みを設定すればこれほど見通しがよくなるものかと驚いた．本書の１章で強調されているように相対論はマックスウェルの方程式を不変にする変換として現れた．ランダウ・リフシッツの教科書にはしばしば埋めるのが難しい計算のスキップがあったが，その頃この本があったならずっと深く相対論や電磁気学を学ぶことができたと思う．著者は理論・実験の両面から深く物理学を捉えている数少ない物理学者であり，かつ理解させることに情熱を持っている．

例をあげよう．1905 年の特殊相対論を新たな公理の設定による成功と捉えている（2 章）．それ以前のローレンツなどによる古典物理学の部分修正の立場を捨て去り，アインシュタインがとったのは，特殊相対性原理と光速不変の原理の２つを公理として設定し，時間や空間を座標系ごとに別々に設定される二義的な量に格下げする立場であるとしている．座標系ごとの時間や空間は，ばらばらに設定されるわけではなく，２つの公理を満たすように関係づけられる．これがローレンツ変換である．このように明確な立場からスタートし，相対論の帰結を次々ローレンツ変換から導いている．ローレンツ短縮を単に導くだけでなく，その際に異なる２点での同時性が座標系に依存することに注意し，初学者の混乱を未然に防いでいる．

これから相対論を勉強するので数式は・・・という人は，スパイスのきいたコラムをまず拾い読みしよう．双子のパラドックスについてのコラムでは，地球とロケットの座標が対等になっていないことが原因であると注意を促している．特殊相対論の範囲で解決される問題なのである．ロケットの反転時に加速度を受けるため一般相対論で扱わねばならないという解説が，権威ある物理学者の本に，ときどきあって混乱を引き起こす．一例はオッペンハイマーの『電気力学』の注釈であるが，星の終末の重力収縮を一般相対論的に計算した一線の物理学者がそんな誤解をするはずがない．もとの原稿を探してみると講義を聴講生がタイプしたもので，後半のやや雑な記録に出ているのである．

著者は，重力波観測を推進している新進気鋭の研究者である．3 章から数学的準備を含め，一般相対論の丁寧な導入，アインシュタイン方程式，シュヴァルツシルド解が導かれる．計算に至る必然性をまず記述し，成分を具体的に計算するなど，初学者のとり付きやすい工夫がなされている．7 章は重力波の放射と検出である．電荷と違って質量には符号がないため重力波放射では四重極放射が支配的になることが注意される．重力波検出の物理は奥が深く，物理学の広大な分野を動員して世界の俊英が競争している．著者はこの分野で大きな貢献をしており，共振器や干渉計における雑音との戦いの記述は貴重である．しかしその詳細は多くの準備が必要なため，他の共著に譲っている．また連星パルサー 1913+16 の軌道周期減少が重力波放射の間接的検証となった経緯を詳しく紹介している．これはニュートン力学における海王星の予言と発見，QED におけるラムシフトと並ぶ一般相対論の精密検証であり，重力波観測を強力に推し進めるきっかけを作った．ノーベル物理学賞の対象ともなったパイオニア的な研究であるが，「あんなものはノーベル賞に値しない」と言う者がいて，それが我が国の研究者の水準と思われたら困るなと心配したことがある．本書は，論理を展開するにあたり根拠を示し，式の導出を丁寧に行って読者を引っ張っていく．著者の謙虚さと教育に対する情熱が，理論・実験の双方を記述する難しい仕事を完成させた．我が国の重力波観測の次のステップを早急に踏み出し，世界にさきがけて重力波の直接検出を目指すべく，国は対応を急ぐべきである．２番目でなく，１番目に検出するために．

7 章のコラムはベートーヴェンの後期の四重奏を思わせる．苦悩を乗り越え，朝の光の中をゆっくりと力強く歩みを進める若者の姿を読者はそこに見るだろう．

大師堂 経明（早稲田大学教育・総合学術院）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

高木　隆司

1978年7月号

30年前，日本の競泳界は不振にあえいでいたように記憶している．1949年の全米選手権大会で，古橋らが世界記録を続出したころ頂点に達し，それから徐々に下っていった．1972年に青木まゆみ（100 m バタフライ）と田口信教（100 m 平泳ぎ）による金メダル獲得という快挙があったが，その後しばらくはメダルがとれなかった．このような背景があったため，競泳の記録向上のためには科学的な対策も必要だという考えが，関係者の間に広まったと推測される．

当時，流れの可視化実験を精力的にやっておられた種子田定俊氏や，流体力学の理論解析を専門としていた筆者に声がかかり，水泳連盟の側から波多野勲氏も参加して，岸記念体育会館で講演会が開かれたのもその頃である．科学の分野との協力は，現代では普通に行われているが，当時はかなり珍しかったらしい．講演会場には，シンクロナイズドスイミングの関係者も来ていたということを，あとで聞いた．

私は，講演の中で凧の尾の働きをとりあげ，凧の本体がつくった気流の乱れをやわらかい尾が打ち消しているのだろうと説明した．この話は，上記の波多野氏に強い印象を与えたようであった．当時の競泳では，手による推進力が重要視され，足の動きはあたかも添えもののように見られていたからかもしれない．

競泳関係者とのつきあいで私が気になったことがあった．それは，科学的にあいまいで主観的に表現された用語がしばしば出てくるということであった．その一つが「水にのる」である．いまでも，実況放送中にアナウンサーや解説者が，「いま水によくのっていますね」などと言う．水面を泳ぐのであるから，水にのるのは当たり前である．しかしながら，どんな状況を指しているのか，なんとなく理解できる．そこで，この言葉の意味をじっくり考えてみると，記録向上のヒントが得られるのではないかと考えたのである．その結果が，拙著「泳ぐ＝水にのる」であった．

30年前と比べると，現在は少し盛り返しているようである．選手の泳ぎを観察できる流水型水槽，各瞬間の姿勢を自動的に取りこむ装置などが開発され，科学技術との協力が盛んになったためかもしれない．しかしながら，あいまいで主観的な用語には重要なヒントが隠されている．そのような用語の考察は今後も重要であろうと思われる．例えば，国民的スポーツである野球でも，「重い球」，「伸びる球」，「つまった当たり」など，人間の感性に訴える表現が多い．これらの表現と物理量との関係を調べると，興味ある結果が得られるのではないだろうか．それは，今後の技術向上に大いに貢献するであろう．



（たかき・りゅうじ，神戸芸術工科大学）

目で見て学ぶ量子力学

第3回 実験でひもとく量子の不思議

渡辺宏にあこがれて日立中研に！

外村　彰

3.1 はじめに

1965年，大学の学部を出ると，私は日立の中央研究所（中研）に入った．大学で習った物理は，数学的で難しくて自分で納得するまで理解できず，こんな学問があるのだということを学んだだけだった．その後，好奇心や必要に応じて，その都度勉強していった．だが，梅沢博臣先生から学んだ“量子力学”は特別だった．子供の頃から，池の波紋が広がっていくのをじっと見ているのが好きだったためか，電子が不可思議な波であることを学んで量子力学に“あこがれ”を抱いた．

中研で電子顕微鏡の研究室に入ったのには，理由があった．提出されたばかりのボーム・パインズの理論[傍注1]を，たった1枚の電子顕微鏡写真で実証した渡辺宏さんにあこがれて，一旦決まった配属を変えてまで渡辺さんの研究室に入れてもらった（図3.1）．当時の中研には，世界的な研究者が勢揃いしていた．2003年3月に98歳で亡くなられた只野文哉[傍注2]さんの下に，渡辺さん，木村博一[傍注3]さん，菰田孜[傍注4]さん等々が，それぞれ超一流の研究をしてい

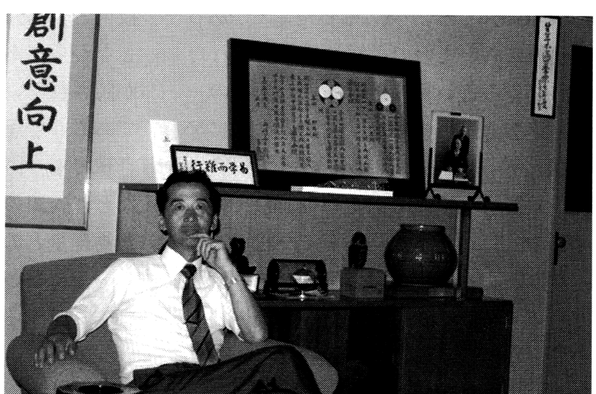


図3.1　日立中研所長時代の渡辺宏（1927–2007）．

［傍注1］　固体内電子が集団的なプラズマ振動を起こすことを予言した理論．後述する．

［傍注2］　日立の電子顕微鏡開発の祖．電子顕微鏡で日本初の博士号を東京大学からもらった．1990年からは科学技術と経済の会で活躍された．

［傍注3］　私が日立で最初に配属されたのは，実は木村さんの研究室で50万ボルトの電子顕微鏡の開発と応用があてがわれた仕事だった．木村さんは，永久磁石を電子レンズに用いた電子顕微鏡（HS-6）を開発し，1958年ブリュッセルの万国博でグランプリ賞を獲得した．

［傍注4］　電子顕微鏡の神様のような人．私は，菰田さんから実験のやり方の手ほどきを受けた．と言うより，菰田さんの下で“丁稚奉公”をして，1年間，くる日もくる日も写真を撮りまくった．1960年代，菰田さんは電子顕微鏡の分解能競争で常にトップを走っていた．

た．“定年後の趣味の電子顕微鏡”ですっかり有名になった永田文男さんも渡辺研究室の 2 年先輩だった．図 3.2 は渡辺さんが若い頃の写真である．

身近にいる人たちが，すごいことをやっているので，「自分でも，やってやれないことはない」という意地や自信を持つことができた．そういう人たちが身近にいることが重要だったように思う．

新しいことをやろうと思ったら，自ら“装置作り”をし，“実験につぐ実験”で目的を達成するのが，日立の電子顕微鏡グループの伝統だった．電子顕微鏡を世界一の製品にまで持っていった技術力，開発力が蓄積されており，どんな装置であっても，原理的に可能であれば自分の手で開発できるという自信を持たせてくれた．

3.2 電子線物理の世界に入ったわけ

私が電子顕微鏡の研究に入るきっかけを作ってくれた渡辺宏さん（図 3.2）は，20 代という若さで，新しく出たばかりのボーム・パインズの理論を検証するという偉業を成し遂げた．私にとって渡辺さんは，電子の波動性を実証した菊池正士[傍注5]と並ぶヒーローであった．

1952 年に渡辺さんは東大物理から只野文哉さんの研究室に入った．初めての仕事は，埃（ほこり）だらけの古い電子顕微鏡を全部バラして組み立てることだった．当時の研究テーマは，電子レンズが中心だったが，渡辺さんは“電子線のプリズム”[傍注6]を作ってみたいと思い立ち，垂直に立っている電子顕微鏡を途中で水平に曲げるという提案を只野さんに出したと言う．渡辺さんの数少ない回顧録を読んで，この奇抜なアイディアにびっくりした．今でこそ電子線を 360° も曲げるプリズムが実現しているが，入社したての渡辺さんのこの発想と意気込みには感嘆した．

結局，横倒しの電子顕微鏡を作って振動問題で大変な苦労をした只野さんの

[傍注5] 私の電子顕微鏡の師は故上田良二先生（元名古屋大学教授，1911–1997）である．上田先生は若い頃東京大学で西川正治教授の助手をしていた．一方，菊池正士（1903–1974）は理研の西川正治研究室に入って，歴史に残る“電子の波動性の実験”を行った．上田先生は，いわば菊池正士の弟弟子（おとうとでし）である．このため，上田先生から菊池正士のことをいろいろ聞いているうちに，会ってもいない菊池正士が，私のヒーローになってしまった．

[傍注6] ガラスのプリズムに太陽光を当てると，虹ができる．プリズムに光を通すと，波長によって曲がる角度が異なってきて虹が見える．虹は太陽光を波長毎に分けたスペクトル写真である．単色の電子線を薄膜サンプルに入射して，出てきた電子線のエネルギー分布（波長分布）のスペクトル写真を得ようというのが渡辺さんの狙いであった．



図 3.2　1950 年代の渡辺宏（後方左から 2 番目，前列中央が只野文哉，その左後ろが木村博一，後列右端は菰田孜）．

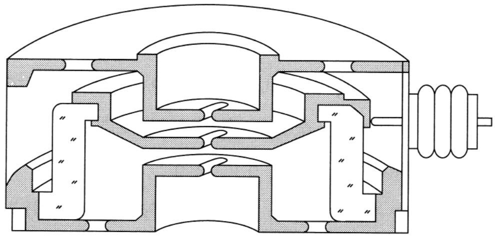


図 3.3　メレンシュテット型静電エネルギー分析器.

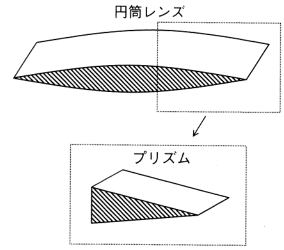


図 3.4　円筒レンズとプリズム.

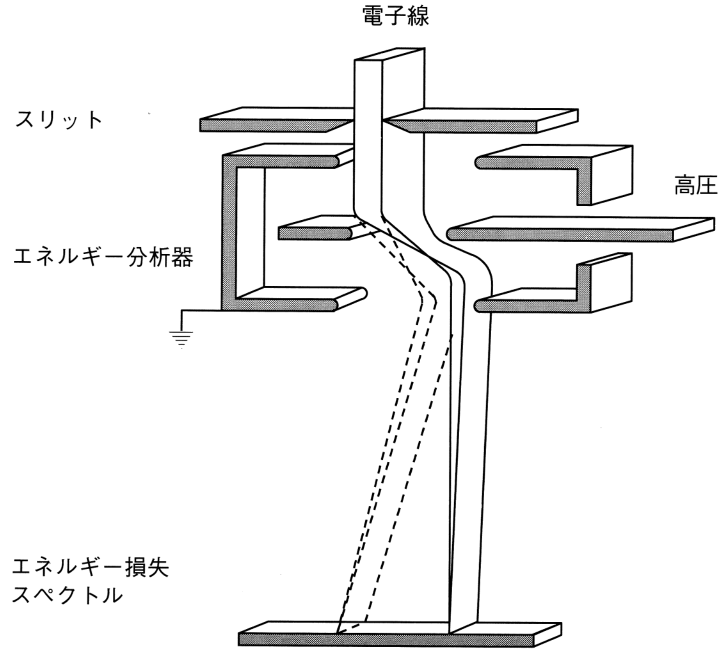


図 3.5　メレンシュテット型静電エネルギー分析器の動作原理.

経験と忠告を聞いて，代わりにG. メレンシュテットが考案した静電型プリズム[傍注7]を作ることになる．これで電子顕微鏡は折り曲げずに済んだ．静電レンズは，中心に円形の小さな孔の空いた3枚の金属電極から成っている．中央の電極に電子銃の陰極とほぼ同じ電位をかけることによってレンズの働きをする．この孔を丸い孔でなく，スリット状にすると（図 3.3），スリットに垂直方向だけにレンズ作用が生じて，円筒レンズとなる．円筒レンズの端の部分だけを使うとプリズムになる（図 3.4）．そこにスリット状の電子線を入れると，電子のエネルギー（波長）によって色分けすることができる（図 3.5）．白色光をプリズムで色分けすると虹ができるのと同じである．これは“メレンシュテット型静電エネルギー分析器”と呼ばれている．電子線のエネルギースペクトルが得られる．

翌 1953 年の秋には，アルミ薄膜を透過してエネルギーを失なった電子線の不連続なスペクトル[傍注8]（図 3.6）を得た．これは，電子顕微鏡像の1部分をスリットで選んでエネルギー毎に分けたものである．写真中央の白いスペクト

［傍注7］　光を波長毎に分けるのが，光の三角形のプリズムである．メレンシュテットが発明した“電子線バイプリズム”もプリズムの一種だが，これは波長毎に分けるのが狙いではなく，2つの電子の波を重ねて干渉させる目的で使われる．電子を曲げる角度は 10^{-5}rad と非常に小さいので波長で分かれることはない．

［傍注8］　光を波長で分けたものをスペクトルと呼ぶ．ここでは，電子線を波長（エネルギー）毎に分けたスペクトルのことを言う．

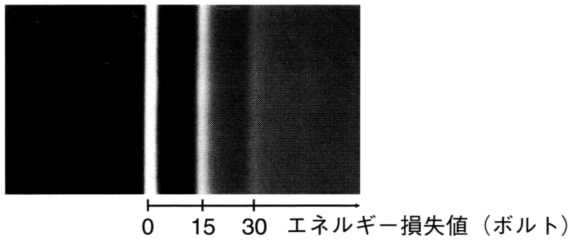


図 3.6　アルミ薄膜を透過した電子線のエネルギー分布．15 ボルトおよび 30 ボルトのエネルギーを失った電子線の存在を示すスペクトル線が観察できる．

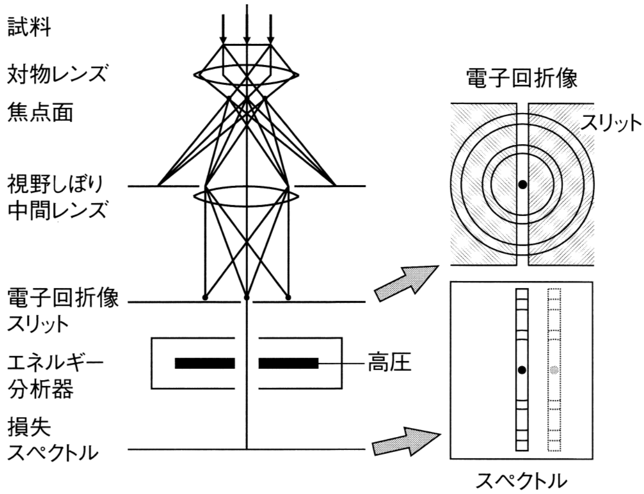


図 3.7　電子回折像のエネルギー分布の観察法．

ル線はエネルギーを損失していない電子線，右側のスペクトル線は 15 ボルトエネルギーを失った電子線である．30 ボルトの電子線も薄く見える．入射した電子線がアルミを通過するときに，アルミ内部の電子にエネルギーを与えたために，出てきた電子線は 15 ボルトのエネルギーを失っている．当時，電子線が固体内で 15 ボルトのエネルギーを何に与えたのかが問題になった．ひょっとすると，D. ボームと D. パインズが予言したばかりのプラズマ振動ではないかとも言われた．しかし証拠がない．

1955 年の春には，装置を改造して“電子回折像”のスペクトルを撮影できるようにした．電子顕微鏡像ではなく電子回折像をスリットで選んでエネルギーを分析する（図 3.7）．これまで，図 3.6 で示したような電子線のスペクトル線は，曲がってしまうことがしばしばあった．3 枚の電極のスリットをきちんと揃えて組み立てていないことが原因だった．この実験をやった私も，苦労したので知っている．ところが，いくら調整しても回折像のスペクトル線はまっすぐにならない．それどころか，実験をやればやるほど曲がりがはっきりしてきた．

困り果てた渡辺さんが，菰田孜さんに相談したところ，ルーペを取り出して写真乾板をじっと見て「こりゃー装置じゃない」とつぶやいたと言う．図 3.8 に示したきれいな写真が，ボーム・パインズの理論の証拠写真となり，世界中

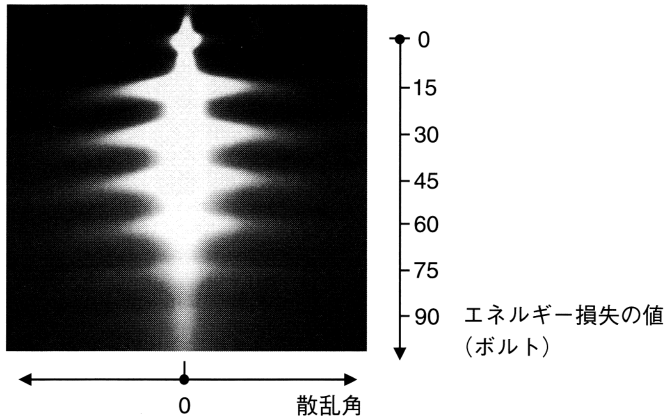


図 3.8　プラズマ振動の分散関係を示すスペクトル写真.

を驚かすことになる. あばら骨のようなスペクトル写真だが, 骨がわずかに曲がっていることに気づくと思う. 何本も骨があるのは, 1 個の電子が厚い試料の中でプラズマ振動を何回も起こしたために 15, 30, 45, 60, 75, 90 ボルトとエネルギーを失ったためである. この "曲がり" がプラズマ振動の "分散関係"[傍注9] を示す動かぬ証拠となった. 菰田さんは "電子顕微鏡の神様" と言われていたが, これだけ直観力の優れた実験家には, 未だに出会ったことがない. 渡辺さんの話を知って, その確信を強めた.

[傍注9]　エネルギーが振動数によって変化するとき, その関係式のことを言う. すぐ後で説明する.

3.3 ボーム・パインズの理論とその実証

渡辺さんが電子線のプリズムを開発し, 実験を始めたちょうどその頃, 金属中の自由電子の振舞いに関する理論がアメリカで作られていた.

電子は電荷をもっているので, 電子間には反撥力が働く. 金属中には沢山の電子がいるので, 事情は混み入っている. この振舞いを明らかにするべく, 1951 年から 1953 年にかけてボームとパインズによって作られた理論は, "ボーム・パインズの理論" と呼ばれ, 話題を集めていた.

ボーム・パインズの理論によって, 電子は個別の振舞いと同時に集団的な振舞いをすることが見出された. 後者は "プラズマ振動" と呼ばれ, 電子の密度が濃い場所と薄い場所が生じて, それが波のように振動する. この振動現象の存在と同時に, 振動数によってプラズマ振動のエネルギーが変化する "分散関係" を予言した.

この分散関係を 1 枚の写真で示して, プラズマ振動の存在の証拠をつかんだのが渡辺さんで 1955 年のことである. 入射電子によってプラズマ振動が実際に起こり, そのとき電子が失ったエネルギーの値が入射電子の散乱角によって異なることを示したのである. 図 3.8 のあばら骨のような写真が分散関係そのものを示しているのである.

渡辺さんの仕事っぷりの早さは見事としか言いようがない. 実験の早さは言

うまでもないが，学部を出ただけの渡辺さんは博士コースに入った人たちより早く博士号を取ってしまった．

日立には，“返仁会 (http://www.hqrd.hitachi.co.jp/henjin/index.cfm)” と呼ばれる2200名以上の博士の集まりがあるが，渡辺さんの記録は未だに破られていない．

渡辺さんが成果を得た翌年の1956年には，電子を発見したJ.J. トムソン（1906年ノーベル賞）の生誕百年を記念する“電子物理に関する国際会議”が実にタイミング良くメリーランド大学で開催された．会議には息子のG.P. トムソン（1937年ノーベル賞）が招かれた．父親は，“電子が粒子であること”を見つけ，息子が“電子が波であること”を見つけた訳である．渡辺さんは上田良二先生と一緒にこの会に参加した．トムソンのほか，パインズ，L.L. マートン，R. フェレル，P. ノジーレスなど錚々たる世界の物理学者が集まり，29才の若い渡辺さんは一躍世界の檜舞台に躍り出た．1956年の「Review of Modern Physics」に，この会で発表された論文の特集が組まれているが，パインズの総合報告 “Collective Energy Losses in Solids”[1)] には，プラズマ振動の分散関係を示す渡辺さんの電子顕微鏡写真が大きくとりあげられている．

渡辺さんの研究テーマや研究仲間と私は何故か因縁がある．私が日立に入社した当時，渡辺さんは，超伝導体中の磁束の観察にチャレンジしていた．超伝導の実験をした翌朝，ヘリウムの大きな風船が階段の踊場につないであり，入社したての私は，研究室の仲間と一緒にヘリウム回収のために，遠くまで運んでいったのを良く憶えている．当時の電子顕微鏡では，磁束量子を観測するには至らなかったが，輝度の高い干渉性の良い開発によって27年後になって磁束量子の観察が可能になった．

また，図3.3に示したエネルギー分析器に名前がついているメレンシュテットは電子線干渉計の発明者としても有名である．私は彼の下で研究したくて1972年から1年間チュービンゲン大学に留学した．ボーム・パインズ理論のボーム[傍注10]にも縁がある．1981年から1986年まで，私はアハラノフ・ボーム（AB）効果の実験に集中するが，AB効果の理論的予測をしたのはY. アハラノフとボームである．

[傍注10]　ボームは量子力学の確率的な解釈を嫌って，「量子力学はまだ不完全な理論である」と主張した．「我々がまだ知っていない“隠れた変数”が見つかれば，確率的な解釈に頼らずに量子力学を作ることができる」と．

ボーム・パインズの理論は，ボームがプリンストン大学の助教授，パインズが大学を卒業したての学生のときに作られた．当時，ボームはR.A. ファインマンとJ. シュビンガーと並んで最も頭のきれる（brightest）物理学者と言われていた．しかし，ボームは不運の人であった．戦後，原爆開発の情報がロシアに漏れているのではないかと，共産党狩りのマッカーシー旋風が吹き荒れたとき，喚問を受けたボームは，友人との信義を重んじて共産党員の会合に参加した人たちの名を明かさなかった．このためボームはプリンストン大学の構内にすら立ち入れなくなった．ブラジル，イスラエルを経て1956年からイギリスのブリストルに移った．1982年第1回目の「量子力学と先端技術の国際会議」ISQM（International Symposium on Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology）が日立中研で開催されるにあたり，「AB効

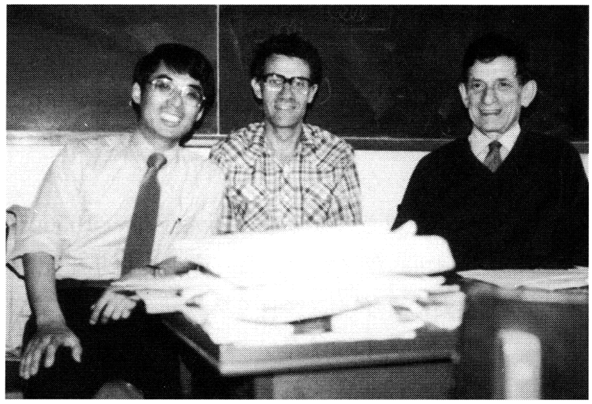


図 3.9　D. ボーム．左から外村，ボームの弟子の B. ハイリー，ボーム．

果が主なテーマとして取り上げられるので是非参加してほしい」とイギリスのバーグベック・カレッジまで出かけて説得した（図 3.9）．そのときは心臓病の不安があって，来日は実現しなかった．

3.4 40 年を振り返って

今回，何故 55 年も前の渡辺さんの業績を紹介したか？ いくつかの理由があるが，2007 年 7 月 17 日に渡辺さんが急逝されたのが最大のきっかけである．渡辺さんが研究をやっていたのは，ほんの十数年間，それも 50 年以上も前のことで，当時の関係者はほとんど亡くなっている．しかし情報を集めようと問い合わせをしたパインズ，R. セロッタ（NIST: 米国立標準技術研究所），P. ノージレスなど，今もって世界が憶えていてくれた．その割には，日本の物理の歴史の中に残っていない．渡辺さんはバイオリン，百人一首，マージャン，ゴルフと様々なことに長けていたので，企業のマネージャーに嘱望され，その半生はその期待に応えるものだった．それでも，研究が大好きで，上田良二先生と一緒に私の研究の進捗状況を陰から見守ってくれ，成果が出ると心から喜んでくれた．

私の研究は渡辺さんと深いつながりがある．既に触れたが超伝導体中の磁束量子の観察は，渡辺さんの願いだった．後に干渉性の良い電子線で観察できるようになった．また巨大な 100 万ボルトの電子顕微鏡の開発計画を立てたとき，完成した暁に運転経費をどうやって捻出するか心配だったが，渡辺さんに背中を押されて勇気が出た．基礎研究所を作って，ずっと先の研究を思う存分できる環境を作ることは，渡辺さんの 10 年来の悲願だった．私は基礎研究所と生死を共にするつもりで研究所の近くに自宅を建て 20 年以上を過ごすことができた．しかし，いつまで経っても，渡辺さんの“手のひら”にあった気がしてならなかった．渡辺さんが突然亡くなって“手のひら”が消えてしまい呆然とした．同時に入社して 5 年という間に成し遂げた渡辺さんの業績を，何とか歴史に残せないものかと思い立った．あっという間に見事な実験を成し遂げたとい

う意味では，菊池正士に次ぐ人だと思う．記録に止めたかった．日本が誇る人の業績をもっときちんとした形で残したいと計画したが，私の力では実現できなかった．

上田良二先生も渡辺さんに期待をかけていた．渡辺さんが研究者からマネージャーになったとき，失望して，本人をひどく怒ったと言う[傍注11]．その分の期待が，私に向けられたことは感じていたが，実に40年もの間ずっと同じ研究をやらせてもらった．ハシゴをはずされた感もあったが，肝心なときには支援してもらった．渡辺さんが中研所長だったとき，我々は出身元である電子顕微鏡をもっと“ひいき”にして，取り立ててもらいたいと思ったが，異常なくらい，公正な立場を貫かれた．当時，東大物理の出身者が多かったが，同窓会をおおっぴらに開くのにも気を使っていた．それでも，私がチュービンゲン大学から留学を終えて帰ってきたとき，開発途中で残していった電界放射型電子顕微鏡が姿を消してしまっていた．その代わりに4000万円の予算を準備していてくれた．電子顕微鏡部門では，こんな形での投資は初めてだった．企業の中で基礎的な研究をこんなに長い間やらせてもらったのは，世界でも珍しい．昨年末，企業の研究者である私が学士院会員に選ばれたとき，自分でもびっくりしたが，外国でもびっくりしてPhysics Worldの記事になった（p.13, February 2008）．

［傍注11］　私も上田先生にひどく怒られたことが一度だけある．今ではノーベル賞候補の筆頭に上がる飯島澄男さんを上田先生がアメリカから日本に呼び戻した．林主税さんと上田先生がやっていた“超微粒子プロジェクト”を終える頃に，飯島さんを日立にという話をされた．丸山瑛一所長，渡辺副社長に話をもち上げたが，渡辺さんは「二人は並び立たない」といって，私が山の上ホテルに滞在中の上田先生に説明に出かけた．おいしいフランス料理だったのに，何を食べたのか分からないほど，苦言を呈された．その後，飯島さんはNECに入りカーボンナノチューブを発見した．日立に入っていたらどうなったか分からないが，渡辺さんの判断は正解だったと思う．

長期的な視点で好奇心のおもむくままに誰もやっていない研究を思う存分やらせてもらった自分の幸運を思うと，次の世代の人たちには，さらにもっと良い環境を与えて，世界をリードするユニークな成果を期待したい．日本が伝統を大切にして，伝統の力を借りながら日本ならではの貢献をしてほしい．そんな思いもあって，ここで渡辺さんのことを紹介させてもらった．今，こんな慌ただしい世の中だけれども，渡辺さんの実例をはげみにして若い人たちが元気を出してチャレンジしてもらいたいと切に願っている．

参考文献

1)　D. Pines: *Rev. Mod. Phys.* **28** (1956) 184–198.

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）



数学の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第2回

三角関数への列車の旅

黒川　信重

1. はじめに

私が数学研究と言えるものを始めたのは，今から40年ほど昔の宇都宮の高校時代からになる．はじめは，誰でもそうであるように，三角関数や三角形や円や数などを研究して，種々の結果を見つけ楽しい時間を過ごしていた．高校への毎日の列車の中がそのような楽しい時間だった．

その後，大学にて数学の研究を行ってきたが，現在も，大学への毎日の列車の中で数学研究に励んでいる．ここでは，列車で行った数学研究を少し振り返ってみたい．読者――特に，これから数学研究をされる若い人に――何かの参考になることがあれば幸いである．なお，時系列による研究史は参考文献の1) として挙げてある文章「問題を解くより予想を」に記した．本稿とは相補的なので参照されたい．

2. 数学研究はやさしいことでもできる

数学研究と言うと，難しい数学でないと研究することがないと思っている人が大部分であるかも知れないが，そんなことはなく，やさしいことでも十分に数学研究になる．例えば，**三角関数**がそうである．

私は，高校生のとき「三角関数の系譜」というノートを書いたことがある．内容は，サイン関数の積公式からコタンジェント関数の和公式，サイン関数の平方の逆数の和公式，…という一連の公式が対数微分と微分を繰り返すことによって得られる，というたわいのない趣旨であった．式で書いてみると

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin(nx)}{2^{n-1}}$$

から対数微分により

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cot\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)=n\cot(nx)$$

が得られ，これを微分することにより

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)}=\frac{n^2}{\sin^2(nx)}$$

が得られ，…と列車のように限りなく続いていく．一番単純な $n=2$ のときなら

$$\begin{aligned}&\sin x\cos x=\frac{\sin(2x)}{2}\\ &\Rightarrow \cot x-\tan x=2\cot(2x)\\ &\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2(2x)}\end{aligned}$$

ということになる．これ自身は簡単な話であるが，$x\to 0$ とすることによって得られる等式

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=\frac{n^2-1}{3}$$

等には図形的意味があることを別の機会に知って数学の世界の面白さに目を見開かされた．確かに，半径１の（単位）円に内接する正 n 角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\cdots\mathrm{P}_{n-1}$ において線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ の長さ $|\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k|$ は $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ だから

$$\prod_{k=1}^{n-1}|\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k|=n,\quad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k|^2}=\frac{n^2-1}{12}$$

ということになる（図１参照）．同時に，これらの等式も，図形を複素数平面で考えれば，１の原始 n 乗根 $\zeta_n=\exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\right)$ を用いて $\mathrm{P}_k=\zeta_n^k$ となり対応する等式は

$$\prod_{k=1}^{n-1}|1-\zeta_n^k|=n,\quad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|1-\zeta_n^k|^2}=\frac{n^2-1}{12}$$

と書けて，しかも，三角関数だけでは見通すのが易しくはなかった積公式

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{\sin(nx)}{2^{n-1}}$$

も

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(z\zeta_{2n}^k-z^{-1}\zeta_{2n}^{-k}\right)=i^{n-1}\left(z^n-z^{-n}\right)$$

という“自然な因数分解”で $z=e^{ix}$ とおけば得られることも知って，複素数での見通しの良さに驚いた．さらに，

$$x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\cdots$$

から

$$\zeta(2)=\sum_{n-1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

を出したオイラーに楽しくなった．歴史を調べ，あとで振り返ってみると，これら一連の三角関数の話はオイラーの手の中の話であった．

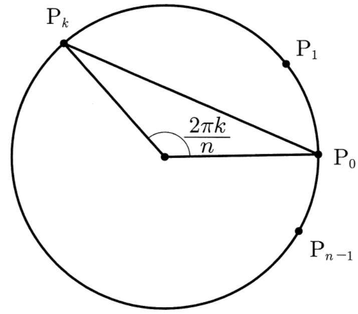


図１　正 n 角形内の三角形．

「三つ子の魂百まで」と言うが，実は，私はその後も三角関数の研究を続けてきた．専門は「数論・ゼータ関数論」で通っているが「三角関数論」と言いたい気もする．とくに「多重三角関数」を重点的に研究している．そこでも，上記のような積公式が基本になる．これは，後で触れたい．

さて，三角関数に魅かれるようになったきっかけはと言うと，それは三角形の研究にあった．とりわけ，「発見的研究法」という副題の単行本

清宮俊雄『幾何学』科学振興社

は三角形の性質から始めて，数学の研究とはどのようにするものかが如実に示されていて，ぐいぐいと引き込まれ導きとなった．

２つの雑誌「大学への数学」「数学セミナー」は毎月出るのを待っていて，高校への列車の中で熟読した．その頃，「大学への数学」には「新作問題」という人気コーナーがあって，私は，その欄への投稿の常連だった．新しい問題を作って送るという，数学研究の本道のコーナーだった．問題解きのコンテストはあっても，問題作成のコンテストは見かけない．可能なら，「新作問題」のコーナーもどこかに復活すると日本の数学界にとっても良いと思う．一方の「数学セミナー」にはNOTEという現在まで続く投稿のコーナーがあって，私も応募しいくつか採用された（一松信先生が担当されていた）．実は，現在ではNOTEの採用側に関係していて，思えば長いつきあいが続いている．

3. 数学研究の三段階

数学研究については，一般の人に知られていな

いだけでなく，専門家にも誤解が生じている．これまでに何度か書いたことがあるが，あらためて繰り返しておきたい．数学研究は，普段はあまり強調されないが

(1) 問題設定．
(2) 問題解決．
(3) 論文発表．

という三段階からなっている．これだけでも知っているのといないのとでは，全く違う．実際，大学で数学研究をしていると言っている人たちでも，このことを知らない人が大多数であることは，日々，実感している．「問題が作れない」「論文が出版できない」という話は毎日のように耳にする．それは，**数学研究**をしていないのである．それでも**数学研究**をやっていると思い込んでいるのは，多分，上記の三段階のうちの (2)「問題解決」(計算実行) の周辺だけで数学研究をやっていると思っているせいに違いない．

通常人から見ても，「数学研究」が指すのは (2) の段階であると思われる．その段階はもちろん中核となる大事な部分である．それはそうなのであるが，忘れがちな (1) と (3) が普通に思われている以上に重要である．その意味で，数学研究の手本としては，生誕 300 年を昨年迎えた (1) (2) (3) 完備のオイラー（全集のうち数学関係だけでも 30 巻ある）がいる．拙著『オイラー探検』（シュプリンガー・ジャパン，2007 年）を参照されたい．

もちろん，(1)「問題設定」は問題を作ることから始まる．当然であるが，数学研究は未解決の問題を扱う．誰かによって解かれている問題は真の問題ではなく，基本的な研究対象でもない．数学で最も難しい問題とされるリーマン予想のような有名な未解決問題を研究する際でも，実際に行うことは，まず「問題を作ること」である．リーマン予想はゼータの零点の実部に関する問題の形で提示されているが，「ゼータの零点を固有値（スペクトル）として解釈せよ」という問題に捉え直して展望が得られる．つまり，「ゼータの零点を固有値（スペクトル）とする行列（作用素）を求めよ」という問題である．簡単に，“リーマン行列” を求める問題と言うこともできるであろう．

問題設定が上手くできると数学研究が明るくなる．若いうちからどんどん問題を作ることをやってほしい．この「問題作り」に関する問題は，実は世界的な問題でもある．20 世紀の数学の弊害は「問題解き」に特化していたことである．19 世紀までは問題作成に豊富な時間を振り向けていた．20 世紀は「問題解決主義」が数学を席巻し，「問題解き屋」が「問題作成家」を上回り，種々の「予想」が解かれたものの，面白い豊富な問題が次第に枯渇状態になってきてしまった．例えば，フィールズ賞も基本的には「問題解き屋」向けの賞であって，「問題作成家」用ではない．もしかすると，「スキーム論」という膨大な「問題」を提示したフィールズ賞受賞者グロタンディークは唯一の例外かも知れない．問題作成家を励まし育成しなければならない時期に，21 世紀の現在は，来ているのである．

数学研究の最後の段階となる (3)「論文発表」の重要性も忘れがちなので，強調しておかねばならない．数学問題について考察するという，いわゆる “数学研究” を行うだけでは，**数学研究**は完了しない．数学専門誌に専門家の査読（レフェリー）後に発表することが必要である．これは，上手く行っても，投稿から印刷出版まで通常 2〜3 年かかるもので根気が必要である．初めの投稿から半年か 1 年経って掲載拒否の連絡を受けることも珍しくない．そのときは，別の専門誌に投稿することになる．同じ雑誌に最終的には出版可と受理されるときでも，書き直しを条件とされる場合も多い．その書き直しも，「もっと一般化せよ」等の趣旨が明確でない場合もあり，なかなか大変である．いずれにせよ，数学の専門家になったら，せめて，毎年数編の論文を出版したい．残念ながら，「数学の論文は他分野の論文とは違い書くのが困難である」と言って，論文出版零の年を重ねる数学専門家が多いのが実態であり，改めねばならない．（ちなみに私は，多重三角関数論を中心に発表した頃には，2003 年に 12 編，2004 年に 18 編，2005 年に 15 編，と専門誌に出版した．）

4. 多重三角関数

高校の頃に三角関数に興味をひかれたと，初めのほうに触れたが，その後日談を書いておこう．それは，「多重三角関数」の研究である．

私は，一般化されたオイラー積の解析性，多変数（ジーゲル）保型形式，多重ゼータ関数（絶対テンソル積），絶対数論，等々の研究を列車で行ってきたが（参考文献の1)を参照），その中でも「多重三角関数」はわかりやすいテーマとなっている．

三角関数を拡張したいという願いは，18世紀のオイラーの頃から強くあり，実際，18世紀から19世紀にかけて，楕円関数やそれをさらに拡張したアーベル関数が花を咲かせた（図2）．とりわけ，数論の中心問題の一つである「代数体上の類体（アーベル拡大）をある関数の特殊値によって構成する」という「クロネッカーの青春の夢」（1853年）は楕円関数とアーベル関数を使って研究された．虚2次体上の場合は高木貞治が有名な類体論を樹立した1920年の論文において楕円関数を用いて完全に解決している．さらに，一般の“虚の体”では20世紀に入ってアーベル関数を用いて進展した．一方，実2次体など“実の体”上ではクロネッカーの青春の夢への糸口が見えなかった．

そのようなときには，心静かに歴史を振り返ってみることが必要である．もともとクロネッカーは有理数体という最も基本的な“実の体”の場合に，三角関数を用いて類体を構成するということを実行していたのだったし，その基盤に立って，一般の体の場合にはどのような関数が必要かと考えたのが「クロネッカーの青春の夢」だったのであった．

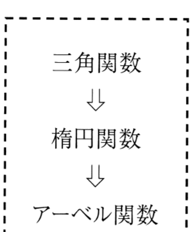


図2　三角関数からアーベル関数へ．

このような歴史認識に立ち帰り，状況を根本から考え直したのが新谷卓郎であり，実2次体用にある特殊関数を構成したのであった（1977年）．その関数は「名前」を付けられず，新谷の研究以降も何か良くわからない状態が続いていた．

私は1980年代初頭に，この周辺の研究を一般的な「多重化」の考察から始めた．1982年の三重での学会への列車の旅の頃に「多重化」（二重化，三重化，…）の見通しは立ち，1984年に日本学士院紀要に出版された論文に一般的な多重化に触れた．「多重化」とは，いくつかの関数から，それらの零点や極の和を零点や極に持つ新たな関数を構成することであり，多重三角関数はそのうちの特に簡単な場合である．1990年頃から多重三角関数の結果を発表し（詳細を解説したのは1991年4月–7月の東京大学における「多重三角関数講義」であった），新谷の関数は二重三角関数と呼ばれるべきものであると提唱してきた．このように見ると，新谷の関数も含め，「クロネッカーの青春の夢」がはっきりと理解されるようになる（図3）．関連文献については参考文献の7)を見られたい．

多重三角関数のさわりに触れておこう．通常の三角関数は

$$\mathcal{S}_1(x) = 2\sin(\pi x)$$

としておくと積公式が

$$\prod_{k=0}^{n-1} \mathcal{S}_1\left(x+\frac{k}{n}\right) = \mathcal{S}_1(nx), \quad \prod_{k=1}^{n-1} \mathcal{S}_1\left(\frac{k}{n}\right) = n$$

となって，余分な定数が出てこなくなりスッキリする．また，前にでてきた正n角形の図で言っても

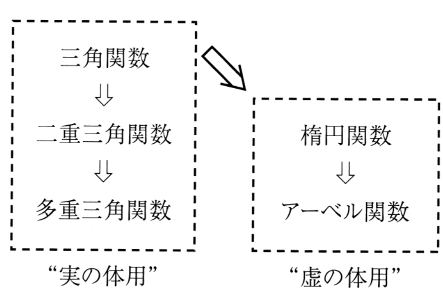


図3　三角関数からの広い流れ．

$$|P_0P_k| = \mathcal{S}_1\left(\frac{k}{n}\right)$$

となっていて気持ち良い．そこで，

$$\mathcal{S}_1(x)=2\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=2\pi x\prod_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}P_1\left(\frac{x}{m}\right),$$

$$P_1(u) = (1-u)\exp(u)$$

という表示の $r \geqslant 2$ における類似物を考えて，「素朴な多重三角関数」

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_r(x) &= e^{\frac{x^{r-1}}{r-1}}\prod_{\substack{m=-\infty\\ m\neq 0}}^{\infty}P_r\left(\frac{x}{m}\right)^{m^{r-1}}\\ &= e^{\frac{x^{r-1}}{r-1}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{P_r\left(\frac{x}{n}\right)^{n^{r-1}}\right.\\ &\qquad\left.\times P_r\left(\frac{-x}{n}\right)^{(-1)^{r-1}n^{r-1}}\right\},\end{aligned}$$

$$P_r(u) = (1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^r}{r}\right)$$

にたどり着いた．零点や極の位数が多重化しているのが特徴である．

この関数は，$\mathcal{S}_1(x)$ の周期性や微分方程式

$$\mathcal{S}_1(x+1) = -\mathcal{S}_1(x), \quad \mathcal{S}_1'(x) = \pi\cot(\pi x)\mathcal{S}_1(x)$$

に対応して（擬）周期性や（代数的）微分方程式を持つ．例えば，

$$\mathcal{S}_2(x) = e^x\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n e^{2x}\right\},$$

$$\mathcal{S}_3(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}e^{x^2}\right\}$$

は

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_2(x+1) = -\mathcal{S}_2(x)\mathcal{S}_1(x),\\ &\mathcal{S}_2'(x) = \pi x\cot(\pi x)\mathcal{S}_2(x),\\ &\mathcal{S}_3(x+1) = -\mathcal{S}_3(x)\mathcal{S}_2(x)^2\mathcal{S}_1(x),\\ &\mathcal{S}_3'(x) = \pi x^2\cot(\pi x)\mathcal{S}_3(x)\end{aligned}$$

をみたす（代数的微分方程式にもできる）．積分表示

$$\mathcal{S}_2(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t\cot(\pi t)dt\right),$$

$$\mathcal{S}_3(x) = \exp\left(\int_0^x \pi t^2\cot(\pi t)dt\right)$$

は，$r=1$ のときは多少の変形版

$$\mathcal{S}_1(x) = 2\exp\left(\int_{\frac{1}{2}}^x \pi\cot(\pi t)dt\right)$$

に対応する．（$\mathcal{S}_2(0)=\mathcal{S}_3(0)=1$ だが，$\mathcal{S}_1(0)=0$ なので代わりに $\mathcal{S}_1(\frac{1}{2})=2$ を使っている．）特殊値としては

$$\mathcal{S}_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

に対応するものとして

$$\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2},\ \mathcal{S}_3\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\right)$$

となる．ここに現れた

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

は今もって謎の量である．むしろ，上記の表記を逆にすると

$$\zeta(3) = \frac{8\pi^2}{7}\log\left(\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)$$

となるので，

$$\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{8}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{n^2}e^{\frac{1}{4}}\right\}$$

が求めるべきものとなる．

なお，$\mathcal{S}_2(\frac{1}{2})=\sqrt{2}$ という式はオイラーの有名な定積分計算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

と同値である．実際，積分表示

$$\log\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}}\pi t\cot(\pi t)dt$$

は $\pi t = x$ と置き換えた後に部分積分を行うと

$$\log\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot x dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\log(\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx$$

となり

$$\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx\right)$$

と書ける．したがって

$$\mathcal{S}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

である．また，$\mathcal{S}_2(x)$ は1886年にヘルダーが，ほとんど知られることのなかった論文で研究していたこともわかってきた．

実は，$\mathcal{S}_r(x)$ は多重三角関数論の序章であって，本体は正規化された多重三角関数

$$S_r\left(x;(\omega_1,\cdots,\omega_r)\right) = \prod_{n_1,\cdots,n_r\geqslant 0}(n_1\omega_1+\cdots+n_r\omega_r+x) \times\left(\prod_{m_1,\cdots,m_r\geqslant 1}(m_1\omega_1+\cdots+m_r\omega_r-x)\right)^{(-1)^{r-1}}$$
$$= \prod_{\underline{n}\geqslant\underline{0}}(\underline{n}\cdot\underline{\omega}+x)\times\left(\prod_{\underline{m}\geqslant\underline{1}}(\underline{m}\cdot\underline{\omega}-x)\right)^{(-1)^{r-1}}$$

の話に連結していく．ここで，

$$\prod_\lambda \lambda = \exp\left(-\frac{d}{ds}\sum_\lambda \lambda^{-s}\Big|_{s=0}\right)$$

はゼータ正規化積の記号であり，ゼータ関数 $\sum_\lambda \lambda^{-s}$ が $s=0$ を含む領域まで解析接続を持ち $s=0$ で正則になる場合に用いる．これは，一般には発散してしまう無限積から“意味のある有限部分”を取り出そうとする方法であり，オイラーとリーマンは

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = \sqrt{2\pi}$$

（つまり“$\infty!$”$=\sqrt{2\pi}$）を実質的に使っていた．

素朴な多重三角関数 $\mathcal{S}_r(x)$ は正規多重三角関数 $S_r(x;(1,\cdots,1))$ と簡単な関係にあり

$$\mathcal{S}_1(x) = S_1(x;1) = 2\sin(\pi x),$$
$$\mathcal{S}_2(x) = S_2(x;(1,1))^{-1}S_1(x;1),$$
$$\mathcal{S}_3(x) = S_3(x;(1,1,1))^2 S_2(x;(1,1))^{-3} \times S_1(x;1)\exp\left(-\frac{\zeta(3)}{2\pi^2}\right)$$

となる．さらに，（擬）周期性

$$S_r(x+\omega_i;(\omega_1,\cdots,\omega_r)) = S_r(x;(\omega_1,\cdots,\omega_r)) \times S_{r-1}(x;(\omega_1,\cdots,\omega_{i-1},\omega_{i+1},\cdots,\omega_r))^{-1},$$

積公式

$$\prod_{k_1,\cdots,k_r=0}^{n-1} S_r\left(x+\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{n};(\omega_1,\cdots,\omega_r)\right) = S_r(nx,(\omega_1,\cdots,\omega_r)),$$

$$\prod_{\substack{k_1,\cdots,k_r=0\\(k_1,\cdots,k_r)\neq(0,\cdots,0)}}^{n-1} S_r\left(\frac{k_1\omega_1+\cdots+k_r\omega_r}{n};(\omega_1,\cdots,\omega_r)\right) = n$$

が成立する．特殊値としては

$$S_2(\omega_1;(\omega_1,\omega_2)) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}},$$
$$S_2(\omega_2;(\omega_1,\omega_2)) = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}},$$
$$S_2\left(\frac{\omega_1}{2};(\omega_1,\omega_2)\right) = S_2\left(\frac{\omega_2}{2};(\omega_1,\omega_2)\right) = \sqrt{2}$$

がわかり，オイラーの定積分計算は

$$S_2\left(\frac{1}{2};(1,1)\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

と解釈し直される．驚いたことには，等式

$$S_2(\omega_1;(\omega_1,\omega_2)) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$$

は η（イータ）関数の変換公式（保型性）と同値であることもわかる．さらには



オイラー胸像前にて（2007 年 6 月，サンクトペテルブルグ・オイラー研究所）．

$$\zeta(3)=\frac{16\pi^2}{3}\log\left(S_3\left(\frac{3}{2};(1,1,1)\right)^{-1}2^{-\frac{1}{8}}\right)$$

等の表示も得られる．［前の表示との関係では

$$\mathcal{S}_3\left(\frac{1}{2}\right)=S_3\left(\frac{3}{2};(1,1,1)\right)^{\frac{14}{3}}2^{\frac{5}{6}}$$

が成立.］

多重三角関数は，新型保型形式論へと発展している．これもオイラーからの流れにある．依然として，オイラーの手の中なのかも知れない．

5. 風車に向かって

数学研究は，数学には全く関係がないと思われるようなものからも示唆を得ることができる．一つだけ例を挙げておこう．それは，セルバンテスの名作『ドン・キホーテ』である．誰でも知っているくだりである「風車」を「巨人」として戦いを挑んでいくところ（1605 年出版の前編第八章）など，数学研究そのものと言えよう．風車を巨人と見誤ったことを批判する向きもあるかも知れないが，私には，それくらいの勇気が数学研究には必要と思える．さらに言えば，私には「風車とはゼータである」と見えて仕方ない．30 世紀の数学を目指して，いろいろなものに，どんどん挑戦していってほしい．

冬の朝　プラットホームに　陽は射して
通過列車に連られて回る

参考文献（著者関連）

1) 黒川信重「問題を解くより予想を」数学のたのしみ 30 号，2002 年 3 月刊；日本評論社「数学まなびはじめ第二集」2006 年 1 月刊に再録［時系列による，数学研究の遍歴］．
2) 黒川重信「素数・ゼータ関数・三角関数：三つの問題」数学のたのしみ 2006 夏，2006 年 8 月，8–28［高校生に向けた講義；素数・ゼータ関数・三角関数の研究への招待］．
3) 黒川信重『オイラー探検：無限大の滝と 12 連峰』シュプリンガー・ジャパン，2007 年 10 月［オイラーの数学を見るために；オイラー生誕 300 年記念出版］．
4) 黒川信重『オイラー，リーマン，ラマヌジャン：時空を超えた数学者の接点』岩波書店，2006 年 12 月［オイラーからはじまるリーマン，ラマヌジャンへのバトンの受け渡し］．
5) 『ゼータ研究所だより』（黒川編著）日本評論社．［私も参加している「ゼータ研究所」の活動報告．ゼータ研究の最先端も紹介.］
6) 黒川信重「素数の一般化とゼータ関数」数学セミナー，1993 年 10 月（72–77），11 月（70–74）［若い人向けの講義録；日本評論社『ゼータ研究所だより』所収］．
7) 黒川信重「新谷卓郎の二重三角関数：実 2 次体のクロネッカー青春の夢の実現へ」数学のたのしみ 2005 冬，2005 年 1 月，76–89［多重三角関数入門］．
8) 黒川信重「数論と作用素」数理科学，2004 年 4 月号［固有値解釈の重要性］．
9) 黒川信重「遠くを見るために」岩波書店『ブックガイド〈数学〉を読む』所収，2006 年［清宮『幾何学』等のすすめ］．
10) 黒川信重「リーマン予想が解けて」数学セミナー，2001 年 1 月号（特集 数学物語 if）［仮想実験の大切さ］．

（くろかわ・のぶしげ，東京工業大学大学院理工学研究科）

不思議な素数方陣

阿部 楽方

1 20世紀の素数方陣

方陣は，普通1から始まる正の整数（連続数）にて作られている．また不連続数を用いる場合もある．また一部に同一数を用いる場合もある．そうなると「素数を用いた方陣はないか」と思うのが自然である．しかし，今までにない発想は，誰にでもできるわけではない．素数を使った方陣は，20世紀になってようやく出現した．1900年に，パズル王と言われたデュドニーが，素数3方陣を1個発表した．これを図1に示す．

7	61	43
73	37	1
31	13	67

図1

まず，この当時の状況の方陣用語を，一通り説明する．3方陣は，3次の方陣とも言い，3を方陣の「次数」と言う．3数を加えた答（15）を「定和」と言い，Kにて表す．方陣には「対称方陣」「完全方陣」「親子方陣」「平対型方陣」「双子方陣」など多く出てくる．これらを説明するのに，「連結型」が登場する．方陣には，連結型をもった方陣と，連結型をもたない方陣がある．連結型とは，2つの和が一定になる組をとり，その場所を線で結ぶとある図型ができる．この2数を結んだ線を「連結線」と呼ぶ．またこの2数を互いに「補数」と呼ぶ．2数の和を「連結和」と呼び，Pで表す．この図型を「連結型」と呼ぶ．連続数の方陣では，必ず連結型ができる．対称方陣，親子方陣等は，連結型をもっている．

「対称方陣」とは，中心に対して対称な2数の和が等しい方陣である．「完全方陣」とは，両対角線に平行な並びの和も等しくなる方陣である．偶数次の方陣（偶方陣）では，斜の中心を結ぶ連結数の場合は必ず完全方陣となる．「親子方陣」とは，外囲をとっても，残りの所が方陣となる．古くから有った方陣である．「平対型方陣」とは，各行内において，中心に関して対称な2数の和が等しくなる方陣である．これは，偶方陣のときにある方陣で，作り易い特徴がある．「双子方陣」とは，同じ次数の方陣が2個あって，同一数がなく，定和が同一のもので，素数方陣から出現したもののようである．

さて，その後20年位の間に，アメリカで何回か発表された．主に「モニスト」の雑誌上であった．1913年には，3方陣から12方陣までの，方陣が，数人により発表された．後でそれは最小と判断された．その結果を示す．方陣の次数，素数の範囲（2は使わないので省く），使わない素数，定和の順に示す．

4方陣 $(1\sim 73, 43, 59, 61, 67)$ $K = 102$,

5方陣 $(1\sim 103, 97, 101)$ $K = 213$,

6方陣 $(1\sim 173, 151, 157, 163, 167)$ $K = 408$,

7方陣 $(1\sim 229, 227)$ $K = 699$,

8方陣 $(1\sim 313, 293)$ $K = 1114$,

9方陣 $(1\sim 433, 419, 421, 431)$ $K = 1681$,

10方陣 $(1\sim 569, 541, 547, 557, 563)$ $K = 2416$,

11方陣 $(1\sim 677, 659, 673)$ $K = 3355$,

12方陣 $(1\sim 827)$ $K = 4514$.

この発表に影響されたのだろうか？ 素数方陣の発表は最小和の発表が多かった．しかも1個だけの発表が多かった．作るのに難しいときは，定和に関係なく，「作ればよい」の発表であった．

1914年には完全方陣の発表があった．4〜8方陣であった．完全6方陣は，連続数ではできない方陣であ

った．図2に示す．親子方陣は5〜10方陣であった．平対型方陣は，1916年に4, 6, 8, 10方陣の発表があり，この当時は最小和という考えはなかった．双子方陣は，1918年にセールスが4〜9方陣を発表した．双子4方陣は浦田繁松 $K=690$，鈴木昭雄 $K=504$，筆者 $K=420$ と少しずつ定和が小さくなった．未だ最小和ではないと思う．双子6方陣は浦田繁松が1955年に作った．双子10方陣は1978年に筆者が (139〜1471) $K=7706$ を発表した．1979年には筆者と矢部寛とで (5〜523) $K=1685$ の連続素数7方陣を作った．大きい方陣より，小さい方陣のほうが難しいからであった．

197	71	83	163	37	79
17	97	109	199	179	29
167	151	53	19	103	137
47	173	131	13	139	127
11	31	181	193	113	101
191	107	73	43	59	157

図2　$K=630$.

また，素数立体方陣も作れる．1963年に鈴木は立体3方陣 $K=3309$，$K=4659$ を作った．1960年には筆者が立体4方陣 $K=4020$ を作った．外国でも立体4方陣の発表があったらしい．素数が随分大きかったので，検討しないでしまった．

素数による星陣は外国にはなかった．1978年には矢部寛が2周6星陣〜2周11星陣を作った．これは連続素数の最小和であった．また3周7星陣，連続素数の最小和 (11〜97) $K=298$ だった．これを図3に示す．これを次のように表記する．外側から内に右廻りである．この計算は下の○で囲んだ箇所を用いて

23	19	59	⑪ ↖	73	53	(61) ↓
17	71	31	13	㊲ ↖	89	(79) ↓
29	47	83	97	41	㊸ ↖	(67)

61 79 67 43 37 11 = 298 等．

のように計算する．そうすると，3周のとき，図に関係なく成立することがわかる．2周星陣は，6星陣 (29〜73) $K=204$, 7星陣 (23〜79) $K=204$, 8星陣 (19〜83) $K=204$，9星陣 (7〜73) $K=156$，…であった．それでも2周5星陣はなかった．1983年に矢部は連続素数5星陣を (23497〜23567) $K=94164$ を作り，小林寿雄は1993年に (13907〜14009) $K=55816$ を作った．条件に合う10数を，300回以上も計算した

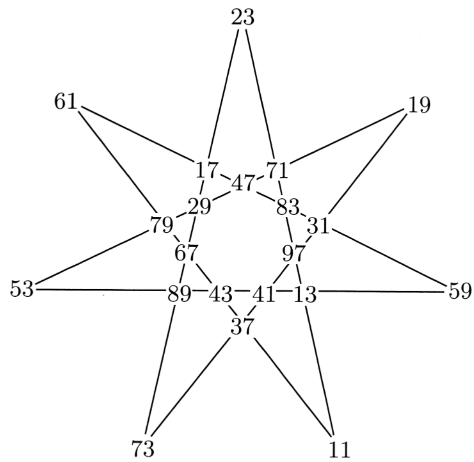


図3　$K=298$.

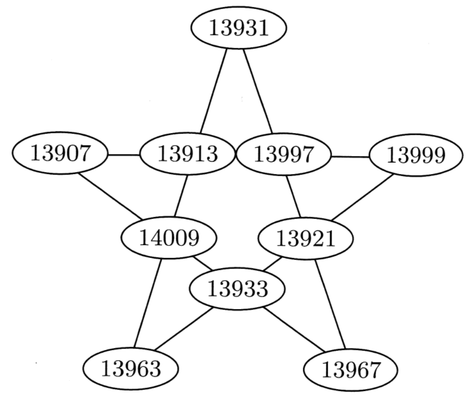


図4　$K=55816$.

後に発見したものであった．これを図4に示す．

矢部は1983年に最小2周5星陣〜10星陣を発表した．

素数による円陣は楽に作れる．しかし，1958年に筆者は素数の3周円陣を作った．各6数の和が等しいほかに，各数を自乗しても定和となる「2重円陣」であった．これを図5に示す．

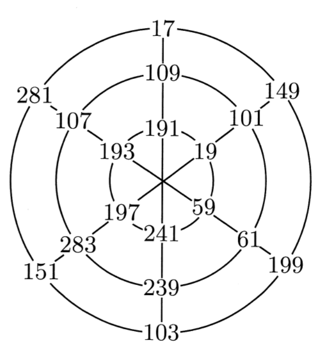


図5　1958年5月28日作, $K=900$.
自乗 $K=174462$.

素数では，方陣も星陣も二重のものはない．円陣は，成立条件が易しいのでできたのであった．また，1958年5月28日は，筆者の長女，「真澄（ますみ）」の誕生日であった．

ここまで淡々と述べたが，それぞれドラマが存在する．「方陣の話」1983年平山・阿部著や，本誌1979年10月号，「数芸パズル」にも若干発表している．それで今回は簡単に記した．

2 素数方陣の特性

素数を使って方陣を作ることと，連続数を使って方陣を作ることを比較すると，同じ所もあるが，違う所のほうが多いようである．連続数には差が一定である性質がある．素数では差が不定である．だから，一般的作法というものはない．ただ解くときに参考になる考え方というものはある．あるいは漠然とした言い方で一般的作法と言えるかもしれない．素数方陣は，一般的作法がないという意味で，一つ一つがパズルである．どのような素数方陣でも，何か工夫しないと作れないのである．

だから「連続した素数で12方陣を作った」人がいても，自分でまた作ってみると，それなりに難儀でもあり，面白味もある．だから，問題はいくらでもあるのだった．ただ，3方陣になると，相互関係が密になり，同じ方陣ができることがある．

一つの方陣の相互関係を深く理解できないと，作るときに困難なことが多い．とくに相互関係は連結図で調べることが多い．関係がわかっても，それに合う素数をどうして見つけるかも，また難しいことである．

連結型の方陣の場合は，鈴木昭雄の「素数の補数表」1958年，「素数の等差表」1957年が参考になる．連結型のある素数方陣の，最小の方陣を定めるには便利である．連結和が何組あるかわかるからである．

素数方陣では，一つの性質があれば，他の性質が自動的にうまく行くということがほとんどない．(連続数では，順くりな性質のために，一つうまく行くと，自動的に皆同じ性質になるときがある．)

その反面，素数方陣ではどの素数を用いてもよいという便利さもある．だから最小和方陣・2番目に小さい和も一つの問題として出てくる．また連続素数の最小方陣・連続素数の2番目に小さい方陣というのも出てくる．

優劣の比較として，最小数と最大数の差の小さいほうという見方もある．

素数方陣で最も難しいのは，素数二重8方陣かもしれない．手がかりさえない．

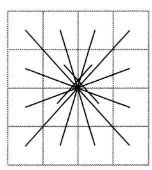
方陣であるのを，素数を使って作ろうとすると，命がいくつあっても足りないくらいのようである．

3 素数4方陣の連結型，その全作

この後は，纏まった素数方陣，珍しい素数方陣，特殊な素数方陣について，断片的に述べる．作った素数方陣は，多数あって全体の輪郭さえ紹介されない．

まず素数4方陣について述べる．1〜16による普通の4方陣は，総数が880個ある．このとき連結型は12種ある．行列変換，その他の変換によって基本連結型は3種であった．この他に同一の連結型でも性質の違うものは1種あった．つまり，計4種類である．その4種の連結型，連結型の計算用方陣，等差図式(成立条件)，等差図式の数表示，4方陣に用いる補数組，素数の等差図式，素数4方陣完成図を，以下この順に示す．

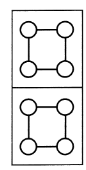
(1) 型



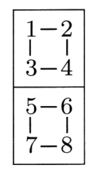
連結型

$\overline{8}$	7	$\overline{1}$	2
4	$\overline{3}$	5	$\overline{6}$
6	$\overline{5}$	3	$\overline{4}$
$\overline{2}$	1	$\overline{7}$	8

計算用方陣



等差図式



数表示

まず連結型を示す．その連結型によって「計算用方陣」を作る．その相互関係を示したものが「等差図式」である．どの行も差も同じ，どの列の差も同じになる．また上の  と下の  は独立していることを示す．等差図式は，その方陣の成立条件である．これに合う数を入れると方陣となる．「数表示」は，等差図式に，「計算用方陣」の数を入れたものを示す．1, 2, $\cdots$ は場所と思えばよい．次にこれに入れる素数を見つける．まず連結和がどの大きさがよいかを定める．8組あればできるが，合う8組を見つけるにはそれ以上ないといけない．連結和を120とすると，12組ある．このうち8組を使って作った．

7	113	
13	107	
17	103	
23	97	
31	89	
37	83	
41	79	
47	73	

計 120

連結和 120 となる 8 組

7	13
17	23
31	37
41	47

素数による等差図式

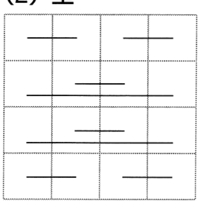
73	41	113	13
23	103	31	83
37	89	17	97
107	7	79	47

素数 4 方陣

$K = 240$

それが「素数の等差図式」である．「計算用方陣」を使って「素数 4 方陣」を作る．計算用方陣から等差図式を作る方法は，一つ一つがパズルなので，今回は省く．（別に説明しないと，面倒で紙数もない．）今回の連結型は 6 種に変換できる．また中級方陣と言って，対角線に平行な斜線が 2 カ所成立する．

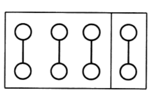
(2) 型



1	83	61	23
17	41	43	67
79	31	53	5
71	13	11	73

$K = 168$

1	$\overline{1}$	5	$\overline{5}$
8	$\overline{4}$	4	$\overline{8}$
$\overline{7}$	3	$\overline{3}$	7
$\overline{2}$	2	$\overline{6}$	6



1	3	5	7
2	4	6	8

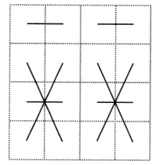
1	31	61	5
13	43	73	17

1	83
5	79
11	73
13	71
17	67
23	61
31	53
43	41

84

今回の 4 方陣は連結和が 84 でできた．(1) 型より成立条件が易しかったかもしれない．この型は変換で 4 種になる．2 軸対称の連結型であった．

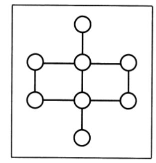
(3) 型

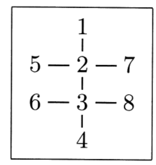


1	$\overline{1}$	$\overline{8}$	8
$\overline{3}$	5	4	$\overline{6}$
7	$\overline{7}$	$\overline{2}$	2
$\overline{5}$	3	6	$\overline{4}$

	41	
11	47	83
17	53	89
	59	

11	109	31	89
79	53	47	61
83	37	103	17
67	41	59	73





11	109
17	103
31	89
37	83
41	79
47	73
53	67
59	61

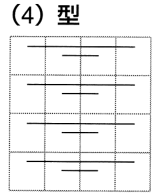
120

この連結型は，変換によって 2 種になる．

(1) 型は上下・左右・2 斜の 4 軸対称連結型であった．この型は左右だけの 1 軸対称連結型であった．(1), (2), (3) 型で 12 種の連結型である．

(4) 型は (1) 型から導かれる型と同じだが，性質が違う．

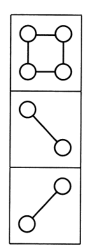
(4) 型



1	$\overline{7}$	7	$\overline{1}$
6	$\overline{3}$	3	$\overline{6}$
$\overline{5}$	2	$\overline{2}$	5
$\overline{4}$	8	$\overline{8}$	4

5	47	37	79
31	67	17	53
71	11	73	13
61	43	41	23

$K = 168$



1	2
3	4
5	
	6
	7
8	

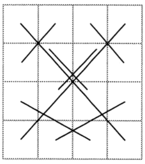
5	11
17	23
13	
	31
	37
43	

5	79
11	73
13	71
17	67
23	61
31	53
37	47
41	43

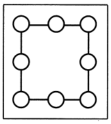
84

以下に述べるこれからの型は，連続数にはない連結型である．

(5) 型



4	$\overline{9}$	$\overline{1}$	6
9	$\overline{2}$	$\overline{8}$	1
$\overline{7}$	8	2	$\overline{3}$
$\overline{6}$	3	7	$\overline{4}$



1	2	3
4		6
7	8	9

1	19	37
31		67
61	79	97

31	71	167	67
97	149	89	1
107	79	19	131
101	37	61	137

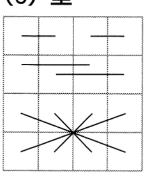
$K = 336$

1	167
19	149
31	137
37	131
61	107
67	101
71	97
79	89

168

連続数にない連結型は外国には1個もない．この種の始まりは，筆者が1954年に出したプリントの表紙にある4方が始まりであると思う．その後横瀬杜美也と二人で，34種の連結型となった．

(6) 型



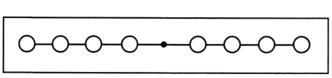
$\overline{9}$	9	1	$\overline{1}$
7	$\overline{3}$	$\overline{7}$	3
$\overline{4}$	2	8	$\overline{6}$
6	$\overline{8}$	$\overline{2}$	4

953	2897
1163	2687
1373	2477
1583	2267
•	•
2003	1847
2213	1637
2423	1427
2633	1217

3850

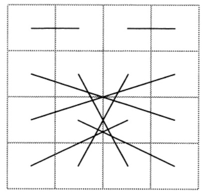
1217	2633	953	2897
2213	2477	1637	1373
2267	1163	2423	1847
2003	1427	2687	1583

$K = 7700$



1 2 3 4 • 6 7 8 9

(7) 型



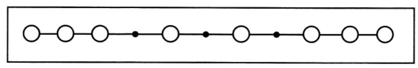
1	$\overline{1}$	$\overline{11}$	11
10	$\overline{7}$	$\overline{5}$	2
$\overline{2}$	3	9	$\overline{10}$
$\overline{9}$	5	7	$\overline{3}$

41	2843
251	2633
461	2423
•	•
881	2003
•	•
1301	1583
•	•
1721	1163
1931	953
2141	743

2884

41	2843	743	2141
1931	1583	2003	251
2633	461	1721	953
1163	881	1301	2423

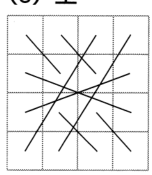
$K = 5768$



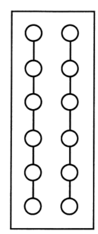
1 2 3 • 5 • 7 • 9 10 11

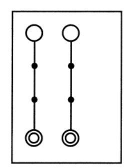
偶方陣であって，成立条件に連結和も関係するようになると，それを満足する素数を見つけることが難しくなる．今回も相当苦心して見つけた．不連続連結型の素数4方陣は，全部筆者の作である．

(8) 型



$\overline{6}$	3	$\overline{2}$	5
$\overline{8}$	6	$\overline{3}$	7
$\overline{7}$	$\overline{4}$	1	8
2	$\overline{5}$	4	$\overline{1}$





◎+◎=P

389	677	1229	1097
953	1307	1019	113
1583	809	257	743
467	599	887	1439

2005年12月13日作，K=3392.

1696

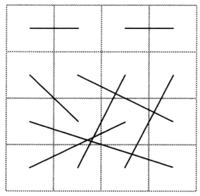
257	1439	113	1583
467	1229	•	•
677	1019	•	•
887	809	743	953
1097	599		
1307	389	差 210	

953 $\overline{743}$ = 1307 $\overline{1097}$ 等

(9) 型

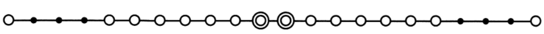
この型は等差素数を用いて作った．不連続数のときを示す．

この連結型も，成立条件に連結和が関係している．また一つの直線で示される．22 の等差素数を用いて $K = 239223496558612$ の 4 方陣を作った．K はもっと小さくできる予定である．この 4 方陣の変換は，行列変換の他に，変換図 A で図 B となる．1 種から 8 種の連結型となる．4 方陣の連結型は，$(6+4+2)+(2+4+4+4+8) = 34$ で 34 種であった．

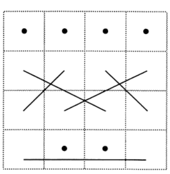


$\overline{8}$	8	$\overline{1}$	1
6	10	$\overline{11}$	$\overline{5}$
9	$\overline{6}$	7	$\overline{10}$
$\overline{7}$	11	5	$\overline{9}$

15	8	22	1
6	10	12	18
9	17	7	13
16	11	5	14



1 • • • 5 6 7 8 9 10 ⑪ ⑫ 13 14 15 16 17 18 • • • 22



15	8	22	1
7	9	13	17
10	18	6	12
14	11	5	16

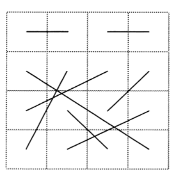


図 A　　　　図 B

4　超難問の 7 方陣

まず 7 方陣を図 6（上）に示す．この矩形集合方陣兼異角度方陣兼旋回型方陣は，超難問の 7 方陣と言われた 7 方陣である．1960 年頃に寺村周太郎によって問題提出され，1965 年に山本富男が作った 7 方陣である．図 6（下）の 3 × 4 の矩形が 4 個集まってできている．

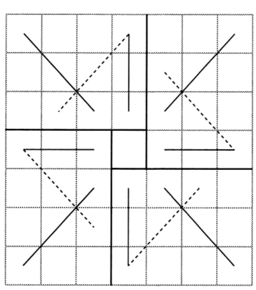


図 7

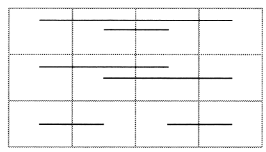
異角度方陣とは，図 7 のように 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315° にとっても皆定和になる方陣である．

例　45°

1319, 1607, 1733, 1553, 1373, 1499, 1787 = 10871 等．

1319	2969	137	1787	2999	977	683
317	1607	2789	1499	107	1889	2663
3023	83	1733	1373	2087	2129	443
1913	1487	1259	1553	1019	1217	2423
263	2549	1847	1439	1667	419	2687
2843	1619	197	1523	2543	1583	563
1193	557	2909	1697	449	2657	1409

2005 年 7 月 20 日作．



1319	2969	137	1787
317	1607	2789	1499
3023	83	1733	1373

$K = 10871.$

図 6

また ---- の 90° の 6 数の和も等しくなる．3 × 4 の連結型をみると，3 数の所が成立すると，3 数の斜も等しくなることがわかる．また連結線が 90° 回転しても，180° 回転しても同じようになる方陣を「旋回連結型方陣」という．最も難しく，調和のとれた方陣である．

5　異角度 6 方陣

奇方陣には異角度方陣があったが，偶方陣には異角度方陣がなかった．それで図 8 のようにした異角度 6 方陣を示す．素数によって初めてできた方陣である．6 方陣で異角度方陣ができたのは，2 行・2 列と両斜を使ってできたものだった．連続数ではできない．6 方

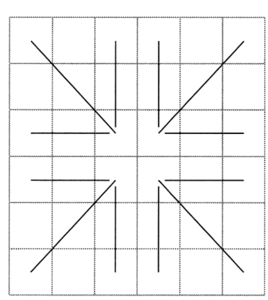


図 8

7	283	277	113	107	383
37	379	109	281	11	353
307	79	199	191	311	83
151	223	211	179	167	239
337	43	1	389	347	53
331	163	373	17	227	59

図 9　$K = 1170.$

2005 年 8 月 13 日作．

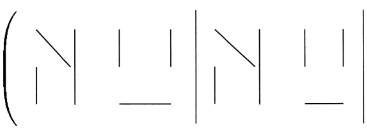
陣で異角度方陣を作るのは，2 行・2 列と両斜を使ってできたのであった．

例　45°　277, 109, 199, 179, 347, 59 = 1170 等

この 6 方陣では，平対型によって作った所に工夫があった（図 9）．異角度であって，3 数+3 数が同数にならない列を選ぶ．

6　素数 3 周複偶星陣

素数方陣では，やや自動的に作るということはできない．素数 3 周複偶星陣では，やや自動的に作ることができる．この方法は筆者が 1951 年に作った「累加配置法」によるものである．（1955 年浦田繁松著『星陣第 3 版』にある）．この星陣は連結型があって，2 数ずつの差が一定となるだけの条件であった．実に楽な条件である．図 3 の 3 段表現法にて記す．3×4 ずつ同じ条件である．この式で 12 星陣，16 星陣もすぐできる．図 10 に 3 周 8 星陣を示す．



$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 6 & 10 & 11 & 7 & 12 & 4 & 5 \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{10} & \overline{11} & \overline{8} & \overline{7} & \overline{4} & \overline{5} \\ 2 & \overline{6} & 3 & \overline{3} & 8 & \overline{12} & 9 & \overline{9} \end{array}\right)$$

11	37	61	71	43	97	29	31
197	199	149	139	157	167	181	179
13	173	19	191	53	113	79	131

1′	11	29	4′
2′	13	31	5′
3′	19	37	6′
7′	43	61	10′
8′	53	71	11′
9′	79	97	12′

差 18

1 − 4
2 − 6
3 − 7
4 − 10
8 − 11
9 − 12
= −18

連結和	210
11	199
13	197
19	191
29	181
31	179
37	173
43	167
53	157
61	149
71	139
79	131
97	113

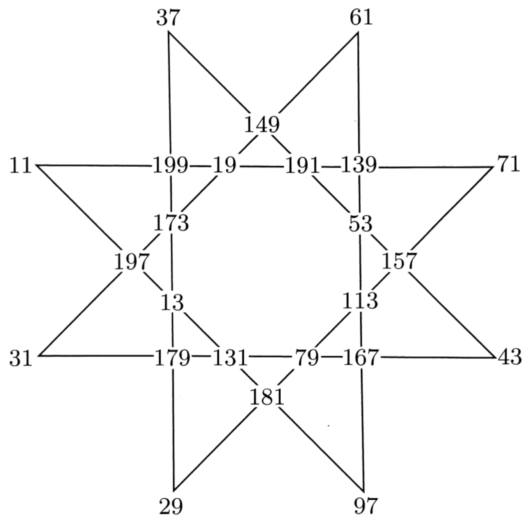


図 10　2005 年 12 月 6 日作，$K = 630$.

7　2 周 5 星陣

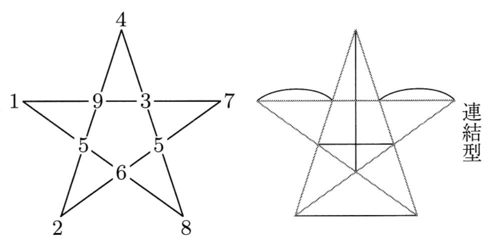


図 11

2 周 5 星陣で連結型のあるものが存在するとは誰も思わなかった．しかし実際は存在する．図 11 に示す．

連結型は 3 種あった．同数を 1 組使う所が特色で，誰もそこは気がつかなかった．

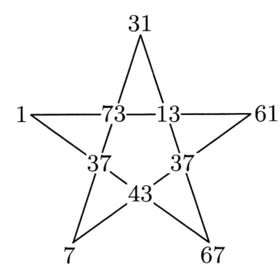


図 12　$K = 148$.

素数 2 周 5 星陣を図 12 に示す．

まだまだ珍しい素数陣は多数あります．紙数がなくて残念です．

（あべ・がくほう，方陣研究家）

編集後記

今回の特集は，ここ数年のフィールズ賞受賞対象に物理の話題が多いこと，歴史的にも物理の発展には数学が欠かせないこと等が企画するきっかけになりました．学問は生き物です．とくに九後先生の記事は，物理が創造されていく生の過程を感じたい方には必読です．（伊崎）

＊　　　＊

物理と数学には思考方法の違いはあれど，弛まぬ探究心と努力，そして広いものの見方が必要であると改めて認識させられます．そして，それは一般的にも言えることなのでしょう．実行することは難しそうですが，私もこのようなことを心掛けていきたいと思います．（大溝）

数　理　科　学　7月号

2008 年 7 月 1 日発行　　　　発行人 木　下　敏　孝

数 理 科 学 編 集 部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平 勢 耕 介　伊 崎 修 通
大 溝 良 平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サ イ エ ン ス 社　　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁